

專訪：

楊振寧和當代數學*

張奠宙

榮獲諾貝爾獎的楊振寧，是當代的大物理學家之一。二十世紀的物理學史上，將會用大字寫上楊振寧的名字。與此同時，楊振寧對本世紀數學的發展，亦有非凡的貢獻。特別是八十年代以來，導源於楊振寧的兩個數學研究分支：Yang-Mills 理論和 Yang-Baxter 方程，先後進入當代數學發展的主流，引起文獻爆炸，形成了少見的全球性的研究熱潮。僅以四年一度的世界數學最高獎——菲爾茲獎來說，1990 年在日本京都授予四位數學家，其中竟有三人的工作和楊振寧的名字密切相關。人們認為，在對數學有重大貢獻的物理學家中，繼牛頓之後續有傅立葉（Fourier）、麥克斯威爾（Maxwell）、愛因斯坦（Einstein）和狄拉克（Dirac），及於當代則無疑是楊振寧了。關於這一點，傳媒尚報導得不多。筆者曾收集有關資料，近日並有機會與楊振寧教授數次長談，內容除涉及數學之外，兼及物理學發展，治學經驗等。珍貴的史料，精闢的見解，足資後人研究借鑑。承蒙楊先生同意，予以整理發表。

主要數學貢獻

數學結構是數學的核心。世上的「理論」

和「方程」無計其數，但能像 Yang-Mills 理論和 Yang-Baxter 方程那樣受到重視，甚為罕見。楊振寧為什麼能提出如此深刻的數學結構？研究其產生契機和發展過程，當是現代科學史的一項重要課題。

張：我是搞數學的，想請您談談您和數學的關係。

楊：我和數學的緣分很深。我父親楊武之是清華的數學教授。在 1942 年我在西南聯大作學士論文時，吳大猷先生讓我接觸「群論」。

1948 年我在芝加哥大學的博士論文又涉及群論與核子物理的聯繫。我以後的許多物理學研究也多和數學有關。我對物理學貢獻最多的方向，往往也是和數學結緣較深的。例如 1954 年提出的非交換規範場論，和 1967 年給出的統計力學中的一些嚴格解，就是如此。前者是 Maxwell 方程的推廣，即 Yang-Mills 方程，這是非線性的偏微分方程組。後者導致 Yang-Baxter 方程，乃是非交換元素的三次乘積的代數方程。它們來自物理學問題，恰好又是重要的和基本的數學結構，因而引起普遍重視。

張：您在研究物理學問題時，是否已預見到它會引起數學界的轟動？

楊：那可沒有，要知道，1954 年的 Yang-Mills 場，引發數學界的熱潮是在 1977 年之後，而 Yang-Baxter 方程的數學高潮只是晚

* 本文寫作承紐約州立大學 CEEC 的查濟民獎金資助。

近五、六年的事。說我能預見二十年以後的事，未免太玄了。

張：世上物理學論文何止千萬，為什麼你的論文會一而再地引起轟動？

楊：也許因為我喜歡面對原始的，有意義的物理學問題，而不沉沒在文獻的海洋裡。

1962年，我曾就應用數學教育發表過一些看法，主張培養應用數學家，在學純數學之前，應讓他先接受一些物理學家的情趣和訓練〔1〕，意思是一樣的。

（本文後半部分還會回到這一問題）

張：七十年代以來，數學研究的趨向是從線性轉向非線性，交換轉向非交換，恰好和 Yang-Mills 方程，Yang-Baxter 方程的特徵相同，而且一些數學工具，如向量叢理論、K-理論、指標定理等已成熟，好像也是這兩項數學熱潮興起的原因，是嗎？

楊：我想是的，研究數學結構需要相應的數學工具。

張：八十年代的數學似乎特別偏愛數學物理，如規範場、量子群等。

楊：數學的發展有它自己的規律，我覺得數學和物理學之間的交融是一種傳統，數學物理在一段時間內成為數學研究的主流方向之一，並不意外。

1954年的原始論文

現在通行的數學和物理學術語：“Yang-Mills場”、“Yang-Mills方程”、“Yang-Mills理論”，都源自楊振寧和米爾斯的論文：「同位旋守恒和同位旋規範不變性」（Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance），刊於1954年的美國〈物理評論〉96卷第1期。1983年出版的〈楊振寧論文選集〉（Selected Papers, 1945~1980, With Commentary），以下簡稱〈

選集〉）一書中，含有作者對過去發表的論文的評註和後記〔2〕，楊振寧在給1954年的這篇重要論文寫的后記裡，敘述了寫作過程。

還在昆明和芝加哥做研究生時，楊振寧已透徹地研究過泡利（Pauli）的有關場論的評論文章，規範不變性決定一切電磁相互作用的事實給他很深的印象。在芝加哥，他試圖將它推廣到考慮同位旋作用的情形，於是他嘗試把場強 $F_{\mu\nu}$ 定義為

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (*)$$

這似乎是電磁場的「自然」推廣。結果行不通，只好放棄。1954年楊振寧在Brookhaven國家實驗室訪問，重又回到這些問題。那時Mills和他同一辦公室，常在一起討論。當他們把(*)式再加上一項 $[A_\mu, A_\nu]$ （ A_μ 和 A_ν 都是 2×2 的矩陣），一切困難都克服了。

Mills在為上海〈自然雜誌〉所寫的綜論文裡回憶說：「1954年我在Brookhaven做博士後，與楊振寧同一間辦公室，楊振寧已多次顯示他樂於幫助青年物理學者，他把推廣規範不變性的想法告訴我，並有較詳細的討論。在討論中我能談點看法，特別是在量子化方面，對建立公式稍有貢獻。然而，主要想法都是楊振寧的〔3〕。」

楊振寧和Mills的論文發表後，一時並無多大反響。兩年之後，日本人Utiyama的論文裡第一次出現了「Yang-Mills Field」的提法〔4〕。到1960年前後，「Yang-Mills理論」、「Yang-Mills技巧」、「Yang-Mills方程」已經很普遍了。

我曾向楊振寧教授就這篇原始論文提過幾個問題。

張：我在一篇很有影響的數學報告裡讀到：「1954年，楊振寧在美國，Mills在英國，構造了一個附加非交換群的非線性的變型的Maxwell方程」〔5〕，這是怎麼回事？

楊：Mills是美國人，1954年確實在美

國，不在英國，數學界對物理學界的事不大清楚，他們弄錯了。

張：你和 Mills 在 1954 年是否意識到文章的價值？你在 1957 年得諾貝爾獎時，如請你挑選幾篇代表作，會不會選上這一篇？

楊：喔，恐怕不會。1954 年時，我只覺得這篇文章「很妙」，並不知其重要。感到它重要是在六十年代。到七十年代意識到它非常重要。只是到了八十年代，由於物理學和數學的發展，才明白規範場理論的極端重要性。現在大多數人都相信規範場會統一世上的各種相互作用。但在五十年代，大家都不可能認識到這一點。至於和數學的聯繫，那就更想不到了。

張：M. E. Mayer 在 1977 年出版的一本書裡曾這樣寫道：「讀一讀 Yang 和 Mills 的論文，覺得作者們已清晰地理解了規範勢的幾何意義。他們使用規範不變的導數和連絡的曲率形式。事實上，這篇論文中的基本方程，和用幾何方法導出的方程完全一樣……」〔6〕。Mayer 認為你已清晰地理解了微分幾何，是這樣麼？

楊：不，不是這樣。我在〈選集〉的後記中曾提到這一點：「Mills 和我在 1954 年所做的事，只是想推廣 Maxwell 方程，我們並不知道 Maxwell 方程的幾何意義，也沒朝那個方向去想」〔7〕。

Weyl 和楊振寧

M. H. Weyl (韋爾)是二十世紀最偉大的數學家之一。同時，他也是規範場論的創始人。Weyl 在 1919 年提出電磁場的規範不變理論，由於 A. Einstein 指出了它的嚴重缺陷，未能成功。等到量子力學誕生之後，Fock 與 London 將規範不變因子 S_μ (實數)代以複數的相位因子 $e^{i\mu}$ ，該理論方始成立。不過，此後的二十餘年裡，Weyl 的規範理論幾乎被人忘記了，直到

1954 年楊振寧和 Mills 提出非交換規範場論，Weyl 的工作才重獲重視。楊振寧也因而成為 Weyl 科學事業的一位繼承人。

1985 年，瑞士聯邦技術研究院主辦 Weyl 誕生一百周年紀念活動時，邀請了三位國際著名科學家作紀念演講。他們是：楊振寧 (物理學家)、R. Penrose (數學家、天文學家) 和 A. Borel (數學家)。楊振寧的演講題目是「H. Weyl 對物理學的貢獻」〔8〕。他在詳細論述 Weyl 的物理學貢獻，特別是規範場理論的發展之外，還提到和 Weyl 有關的交往：

「當我在 1949 年成為普林斯頓高等研究院的一名「年輕」成員時，曾見過 Weyl。此後的幾年 (1949 ~ 54) 內，我時常看到他。他很好親近，但我不記得曾和他討論過物理學或數學問題。在物理學家中並未聽說過 Weyl 繼續對規範場的思想有興趣。Oppenheimer 和 Pauli 都未提到這一點。我猜想他們也沒有以某種方式將 Mills 和我的論文介紹給 Weyl。如果他知道我們把他所鍾愛的規範不變性和非交換李群聯接在一起的時候，我想像他一定會非常高興和激動。」

我注意到楊振寧和 Mills 在他們的原始論文裡沒有提到 Weyl 的名字。楊振寧解釋說，Weyl 的工作已是常識，物理學界的場論研究多半引用 Pauli 的文獻〔9〕〔10〕。此外，我也在思考，為什麼楊振寧會成為 Weyl 的繼承人？Weyl 比楊振寧年長 37 歲，屬於不同的世代。他們來自不同的國度，具有東西方各異的文化背景，分屬數學界和物理界，又無師承關係和學術交往，是什麼原因把他們連接在一起的呢？有一個答案是：Weyl 和楊振寧都對數學物理的基本問題感興趣，這是共同的。所不同的是：Weyl 是通曉物理學的數學家，而楊振寧則是深諳數學的物理學家，我曾以這一看法徵詢楊振寧的意見，他說：「好像可以這麼說。」

Yang-Mills 場和現代微分幾何

楊振寧和Mills的論文問世之後，物理學界陸續有文章進行討論和推廣。從1962年起，也有一些物理學家注意到它和微分幾何的聯繫〔11〕，但均未能引起重視。真正對數學界產生巨大影響的工作，仍是楊振寧和他的合作者完成的。這就是吳大峻和楊振寧於1975年發表的論文：「不可積相因子概念和規範場的整體公式」〔12〕。為此，我作了以下的採訪。

張：在1954年你和Mills的論文發表以後，你是否仍繼續研究規範場論？

楊：我一直在關注這方面的進展。六十年代以來，各方面的反映日趨熱烈，許多學者常來和我討論。蘇聯人D. Ivanienko在1964年將規範場的論文譯成俄文集冊出版。大約在1967年，我想把規範場理論再作一次推廣。有一天，我正在上廣義相對論的課，開始注意到Levi-Civita的平行移動概念是不可積相因子概念的一個特殊情形，這使我看到規範場論中的公式

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} + i\epsilon (B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu) \quad (1)$$

和黎曼幾何中的公式

$$R_{ijk}^{\ell} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ij \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mj \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

不僅十分相似，而且(2)是(1)的特例！

張：這是你第一次感到規範理論和微分幾何有密切聯繫麼？

楊：是的，於是我向本校的數學系系主任J. Simons求教，Simons告訴我，你的規範理論一定和現代微分幾何中的纖維叢理論有關，並讓我去讀Steenrod的「纖維叢的拓撲學」〔13〕。但是我看不懂，這種抽象的數

學語言對物理學家來說，實在沒法讀下去。

有感於此，我十年前在漢城的一次講話裡曾這樣說：「現有兩類數學著作。第一類是我看了第一頁就不想看了，第二類是看了頭一句話就不想看了。」在座的物理學家都有同感，鼓掌表示贊成。後來不知怎麼搞的，有家數學雜誌——Mathematical Intelligencer（數學信使）——把它登了出來，流傳到了數學界。也許有些數學家對此不以為然，可是我說的是實話。

張：數學家也不都贊成這種晦澀的語言，但是改變它很難，這恐怕和數學的特徵有關。那麼，你在什麼時候才掌握纖維叢的數學理論呢？

楊：纖維叢理論並不難懂，聯繫物理學背景就更好理解了。難懂的只是數學著作的語言。1975年初，我請Simons作了一系列的講座。感謝他的幫助，我們開始使用纖維叢理論解釋物理學現象，甚至理解了深奧的Chern-Weil定理。在此基礎上，就產生了上面提到的吳大峻和我合作的文章，並終於引起數學家的研究興趣。

張：這篇論文的特點是什麼？為什麼其它論文沒有如此大的效果？

楊：我想在於我們具體地，明確地指出了纖維叢理論和規範場理論的聯繫，甚至給出了一張對照表，把規範理論中的物理學概念和纖維叢理論中的數學概念加以一一對應，使人一目了然，這就便於別人的進一步工作。一篇文章所產生的影響，當然和機遇有關，不過，有的文章或者語言晦澀，過於形式化，讓人看不懂；或者模稜兩可，實質不清，以致無法引起讀者思考；因而雖然發表較早，但實際效果不大。

楊振寧和I.M. Singer及
M.F. Atiyah

物理學上的規範場理論與數學上的纖維叢理論有密切聯繫，今已廣為人知。然而，很少有人知道，正是楊振寧本人和 Singer 的交往，才觸發了數學界對 Yang-Mills 理論的關注

，導致八十年代一系列的數學發展。事情仍然要從 1975 年吳大峻和楊振寧的文章說起，在那篇論文裡，刊有如下的一張對照表：

規 範 場 術 語	纖 維 叢 術 語
規範或整體規範	主坐標叢
規範形式	主纖維叢
規 範 勢	主纖維叢上的連絡
S	轉移函數
相 因 子	平行移動
場 強 f	曲 率
源 J	?
電磁作用	U(1) 叢上的連絡
同位旋規範場	SU(2) 叢上的連絡
Dirac 的磁單極量子化	按第一陳類將 U(1) 叢分類
無磁單極的電磁作用	U(1) 平凡叢上的連絡
有磁單極的電磁作用	U(1) 非平凡叢上的連絡

1976 年夏天，麻省理工學院的數學教授 I. M. Singer 來紐約州立大學石溪分校訪問。楊振寧和 Singer 會見時，介紹了吳大峻和他的上述工作。Singer 一下子就被這張對照表吸引住了。當年秋天，Singer 又去英國牛津大學訪問，向當今最負盛名的大數學家 Atiyah 轉述了楊振寧等的研究情況。於是，Atiyah, Hitchin，以及 Singer 三人合作，寫了「Deformation of Instantons」的著名論文〔14〕。1977 年 4 月間所散發的這篇論文的預印本，乃是數學界研究 Yang-Mills 方程熱潮的開端。1978 年 Atiyah 寫了〈Yang-Mills 場的幾何學〉等一系列著作〔15〕，再因蘇聯數學家 Manin, Drinfeld 等先後加入，終使規範場理論的研究成為八十年代數學發展的一個主流方向。

Singer 在大學裡原是學物理的，1947 年轉入數學系做研究生。他在一篇演講裡曾這樣

回顧：「三十年後，我發覺自己在牛津大學講規範場理論。這件事起始於吳大峻和楊振寧的一張對照表，結果是得到了瞬子（instantons），即 Yang-Mills 方程的自對偶解。做了三十年的數學，似乎我又回到物理學了。」為了強調這張對照表的重要性，Singer 在 1985 年的這篇文章裡，全文引用了該表〔16〕。

Atiyah 把「規範理論」作為他的〈論文選集〉第五卷的標題。他在前言中寫道：「從 1977 年開始，我的興趣轉向規範場理論以及幾何學和物理學間的關係……1977 年的動因來自兩個方面：一是 Singer 告訴我，由於楊振寧的影響，Yang-Mills 方程剛剛開始向數學界滲透。當他在 1977 年初訪問牛津時，Singer，Hitchin 和我周密地考察了 Yang-Mills 方程的自對偶性。我們發現，指標定理的一個簡單應用，就可得出關於「瞬子」參數個數的公式。」「另一方面的動因則來自 Penrose 和他的

的小組」〔17〕。

我曾向楊振寧博士提過以下問題。

張：你和 Singer, Atiyah 個人交往如何？

楊：我和他們都熟悉，多次見面。但沒有合作研究過。Atiyah 出版〈論文選集〉第五卷（規範場理論）時，曾送我一本。

張：物理學家影響數學發展的事例很多。你對纖維叢理論的促進，使我想起愛因斯坦對黎曼幾何的推動。

楊：愛因斯坦博大精深，後人難以企及。如果要比較這兩件事，愛因斯坦在創立廣義相對論之時，尋求黎曼幾何作為數學框架。這和規範場在事後發現與纖維叢有關不一樣。規範場理論、纖維叢理論，二者是各自發展，殊途同歸。

張：Grossmann 向愛因斯坦介紹 Ricci 的張量分析，Simons 向你們講解纖維叢理論，也有相似之處。Simons, Singer, Atiyah 等數學家對規範場理論的研究工作，物理學家有何評論？

楊：Simons 很少涉及規範場理論研究（經查，Simons 在 1979 年曾和法國數學家有過一篇論文〔18〕）。Atiyah 和 Singer 是當代數學大家，他們建立的指標定理，溝通了幾何學與分析學的聯繫，是當代數學發展的一個里程碑。恰巧指標定理可用於 Yang-Mills 方程的自對偶解個數的確定。這一結果及其他數學成就對物理學研究當然有很多幫助。

楊振寧—Singer—Atiyah，這條物理學影響數學的歷史通過，肯定是二十世紀科學史上的一段佳話。關於 Yang-Mills 理論在當代數學中的作用，在美國國家科學研究委員會數學科學組的一份報告裡這樣寫道：

「Yang-Mills 方程的自對偶解具有像 Cauchy-Riemann 方程的解那樣的基本重要性。它對代數、幾何、拓撲、分析都將是重要的……在任何情況下，Yang-Mills 理論，都是現代理論物理學和核心數學的所有子學科間

緊密連繫的漂亮的範例。Yang-Mills 理論乃是吸引未來越來越多數學家的一門年輕的學科。」〔19〕

楊振寧-貝克斯特方程

楊振寧的又一重大科學貢獻是建立了「Yang-Baxter Equations（楊振寧—貝克斯特方程）」，一般簡記為 YBE。它起源於楊振寧 1967 年發表的一篇統計力學論文：「 δ 函數相互作用的一維多體問題的一些嚴格解」〔20〕，楊振寧深受王竹溪教授的影響，在統計力學方面做了許多研究工作。對於量子統計力學，到六十年代時，一般仍只會解「二體問題」，很少涉及多體問題。楊振寧從最簡單的一維費米子的多體問題著手，用 Bethe 假設求得了嚴格解，這在物理學上當然很有意義。更為重要的是，楊振寧在求解過程中，得出了一個必須滿足的算子方程：

$$\begin{aligned} A(u)B(u+v)A(v) \\ = B(v)A(u+v)B(u) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 A, B 是矩陣（算子）， u, v 是參數。這是一個不可交換元素的三次代數方程。五年之後，Baxter 在解決八頂點冰模型時，也得出同樣的方程(3)。1980 年，蘇聯數學家 L. D. Faddeev 將(3)稱為 Yang-Baxter 方程，即被廣泛接受，沿用至今。八十年代以來，圍繞 YBE 開展了多層次，多方向的研究，形成了又一次「文獻爆炸」，它所涉及的領域有：

物理學：一維量子力學問題；二維經典統計力學問題；共形場論。

數學：紐結理論；辮結理論；算子理論；Hopf 代數；「量子群」；三維流形的拓撲；微分方程的單值性。

現在看來，Yang-Baxter 方程和 Yang-Mills 方程一樣，都是現實世界所提出的基本數學結構。Yang-Baxter 方程的影響才剛剛開始，

目前看到的也許只是冰山的一角。

我急切地向楊振寧教授探詢有關 YBE 的奧秘。

張：在〈選集〉(1983)中，收入了1967年產生 YBE 的那篇論文，但是在該文的後記裡並未評其重要性，為什麼？

楊：〈楊振寧論文選集〉的後記寫於1981年冬。那時，雖然蘇聯學者已經重視YBE，但世界性的研究高潮尚未到來，我當然也未能像今天那樣理解YBE的重要性。不過，我自己對1967年的這篇論文是很下了功夫的。文章並不好懂，其中用了很多數學演算和技巧。YBE 倒不是最難的部分，在文章的前四分之一就導出來了，而後面大部分的推導更難些。

張：YBE 不過是一個特殊的矩陣方程，為何有那麼大的功效呢？

楊：在最簡單的情形，YBE 方程可寫成

$$ABA = BAB$$

滿足這一方程的算子 A, B 多的很，例如梳辮子，有三股頭髮 1, 2, 3 位於左、中、右三處，若以 A 表左與中交叉，以 B 表右與中交叉，則三股 123 的頭髮經 A 成 213，經 B 成 231，再經 A 成 321，即 123 經 ABA 變為 321。如施行 BAB ，則依次為：123；132；312；321，結果相同。也就是說，雖然許多算子不可交換： $AB \neq BA$ ，但有性質 $ABA = BAB$ 。YBE 正是為這類算子提供了數學模型，因而會和辮結理論等也掛上了鉤。

從數學上看，如記 $[A, B] = AB - BA$ ，則由 Jacobi 等式

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$$

可導出整套的李代數、李群理論。蘇聯數學家 Drinfeld 證明，由 YBE 可導致 Hopf 代數，進而衍生出其他數學分支。所以，YBE 肯定是一項非常基本的數學結構。

張：YBE 是一個純數學的方程。這種非交換、非線性的數學結構，正符合二次大戰以

後數學發展的走向。然而，它不是由數學家提出，而由物理學家首先發現，倒頗令人驚奇。

楊：著名拓撲學家 Hopf 為了研究李群的推廣，曾定義了一種代數，即 Hopf 代數，可是一直沒有好的重要的例子。後來 Drinfeld 發現用 YBE 可構造出一個絕佳的實例。可見現實的物理世界畢竟是豐富的。

張：我的印象是，YBE 在數學界的影響比物理學界要大。

楊：目前是如此。有些物理學家認為 YBE 不是物理學，而是數學。我覺得不是這樣。YBE 這一數學結構非常基本，無論物理學家是否喜歡，最終必然要使用它。二十年代的物理學界，許多人反對用群論，特別是李群，斥之為「群害」(group pest)。有人設法避開 $SO(3)$ ， $SU(2)$ 等等，宣稱殺死了「群龍」(group dragon)，可是現在的物理學家已把李群當作常識。我倒是覺得我自己認識 YBE 的重要性太晚了一些，在整個七十年代沒有繼續去研究它。即使我自己沒有時間，至少應要年青人去做。結果是延誤了十幾年。這是我的一個失誤。我在 1972 年赴大陸的演講時，倒曾專場介紹過 YBE，但那是在文革時期，當然也沒有什麼反響。

楊振寧與菲爾茲獎獲得者

國際數學界對楊振寧的兩項數學貢獻：

Yang-Mills 場和 Yang-Baxter 方程給與極高的評價。在四年一度的國際數學大會上，頒發世界數學最高獎——菲爾茲獎，邀請世界第一流的數學家作報告。獲獎者的工作方向和大會報告的內容，在很大程度上反映了數學發展的主流。

1986 年的國際數學家大會，有三人得菲爾茲獎：S. Donaldson, G. Faltings, M. Freedman。M. F. Atiyah 在會上這樣介紹

Donaldson 的工作：

「1982年，Donaldson 證明了一項震動數學界的結果。如果和M. Freedman 的一項重要工作合在一起，Donaldson 的結論意味著：存在一個「怪異」的四維空間，它和標準的歐氏空間拓樸等價，但不是微分拓樸等價。」

「Donaldson的結果來自理論物理中 Yang-Mills 方程的研究，……Donaldson 強有力地使用『瞬子』作為幾何工具。這一方法完全地揭示了新的現象，並顯示 Yang-Mills 方程與新的研究領域有漂亮的吻合。」〔21〕

1990 年的國際數學家大會，又將菲爾茲獎授予以下四位數學家：V. Drinfeld, V. Jones, S. Mori, E. Witten.

蘇聯數學家 Drinfeld，我們前面已經提到他對 Yang-Baxter 方程的研究，在菲爾茲獎獲得者公報裡有這樣的介紹：「我們要提到 Drinfeld 和 Manin 在構造『瞬子』中的先驅工作。這些是 Yang-Mills 方程的解…… Drinfeld 在物理學上的興趣，繼續保持在 Belavin 合作的 Yang-Baxter 方程的研究上。」〔22〕

美國數學家 Jones 的主要數學貢獻之一涉及紐結理論、量子群、Hopf 代數等「由 Jimbo 和 Drinfeld 從求解 Yang-Baxter 方程而產生的研究領域」，「他打開了一個新的方向：認識到在某些條件下，Yang-Baxter 方程的解可用來構造『連接（links）』的一些不變量。」〔23〕

另一位美國數學家 Witten 的研究工作也和 Yang-Mills 方程、Yang-Baxter 方程有密切關係。早在 1978 年，Witten 就有關於 Yang-Mills 方程的先驅性工作〔24〕。他在拓樸量子場論、量子群、Jones 多項式等方面的工作都可與楊振寧的工作有密切關係。

在 1990 年的這次國際數學家大會上，大

會報告集中在數學物理方面，以至引起某些抱怨：「到處都是量子群、量子群、量子群」〔23〕。這一抱怨是否合理，姑且不論，而與 Yang-Mills 方程、Yang-Baxter 方程密切有關數學原理，成為八十年代數學發展的主流，並且還將繼續下去，則已是不爭的事實。

要研究原始的物理學問題

面對楊振寧的科學成就，我陷入了沉思，我也做過一點成效不大的數學研究，知道一些科學研究的艱難。通常，一個人的論文能夠被別人引用，就算沒有白做。如能被多次反覆引用，就是一大成功。倘若一項科學工作賦有個人特色，具有出眾的創造性，被同行公認應冠以作者的名字，那是科學家的榮譽。至於像楊振寧那樣，自己的工作成為物理學和數學發展的里程碑，被人稱為 Yang-Mills 理論和 Yang-Baxter 方程，並當作許多科學分支的經典與基石，那就不僅是給個人的榮譽和褒獎，而且是科學發展史上的重大事件了。楊振寧的成功經驗是什麼？有沒有治學的「訣竅」？對青年後學有什麼啓示？這是我採訪的，恐怕也是廣大讀者想要知道的。

張：我想回到前面提到過的問題，您的成功是否有什麼「訣竅」？

楊：很多人問過我這個問題。我想了一下，除了機遇和環境因素之外，似乎有兩個原因是主要的。第一個是：「面對物理學中的原始問題，不是淹沒在文獻的海洋裡！」

張：請作一些詳細的解釋。

楊：Yang-Mills 理論和 Yang-Baxter 方程的工作都是當時物理學上很原始的問題，卻並非當時的熱門課題。阿貝爾規範場是一個老問題，有 Weyl, Pauli 等大師的研究文獻，大家以為已經完全解決了，沒有新東西了。

1954 年以前沒有人認為可以推廣。所以我和

Mills 的論文發表後，關注的人不多，我們也不知道會產生多少影響。可是它畢竟是物理學的基本問題，後來終於顯示出重要性。

Yang-Baxter 方程則是統計力學中的一個小問題，最簡單的多體問題，同樣也是一原始問題。這類原始的基本問題需要從新的角度去考慮，運用獨特的技巧，所以可能是一些新理論、新數學結構、新技巧的出發點。

張：我常聽到一些科學研究的經驗介紹，說應該去讀最新的文獻，從中找出最新的課題，才能做出領先的工作，您認為對麼？

楊：讀文獻找題目是科學研究方法之一，但不是唯一的方法。老是讀文獻的危險就是會忽視物理學的原始問題，以至淹沒在文獻的大海裡。有些人喜歡做錦上添花的事，可是他那個「錦」就不一定對，你那個「花」也就沒什麼意思了。理論物理學界常有這樣的情形，A 做了一篇文章，B 說 A 文不夠好，要補充，接著 C 又說 B 文也不好，應該改進。一群人在 A 文的基礎上忙，卻不問 A 究竟做的是否符合物理學的原始問題。一旦 A 錯了，大家都勞而無功。所以面對物理學原始問題才是最重要的。

張：數學界這類情形也很多，大家都想快些發表文章，競爭使功利主義盛行。

楊：數學論文總還得有證明。有些理論物理的文章只要「猜」就行，不必證明，所以更容易濫。至於功利與競爭當然應該有，只是不可過於追求。跟文獻走，初學練兵可以，想做得好一些，必須在面對原始問題的基礎上去讀文獻，做研究。

張：聽說您在超導理論的 Hubbard Model 研究上又有新的突破？

楊：這一工作的意義大小，目下還很難說，但我的做法仍是面對原始問題。關於超導理論，Hubbard Model 的論文已有許許多多，可是面對原始 Hubbard Model 的論文卻很少。我仔細察看原始的 Hubbard 模型，發現在一個三角恒等式的背後有一個 $SO(4)$ 的對稱

性〔25〕，很出意料之外。這一工作乃是我面對原始物理學問題的又一個例子。

張：Yang-Mills 理論是處理「大問題」，Yang-Baxter 方程、Hubbard Model 中 $SO(4)$ 的發現，則是研究「小問題」的產物，那麼應該多研究「大問題」，還是多關注「小問題」？

楊：在台灣的清華大學八十年校慶會（1991）上，也有一位同學這樣問我，回想我在芝加哥做研究生時，我的老師費米曾回答過這個問題。他說，多半時間應該做小問題，大問題不是不可以做，只是成功機會較小。通過小問題的訓練，會增加做大問題的成功機會。幾十年下來，我覺得費米的話很對。一個人成天想大問題，弄不好會發神經病的。

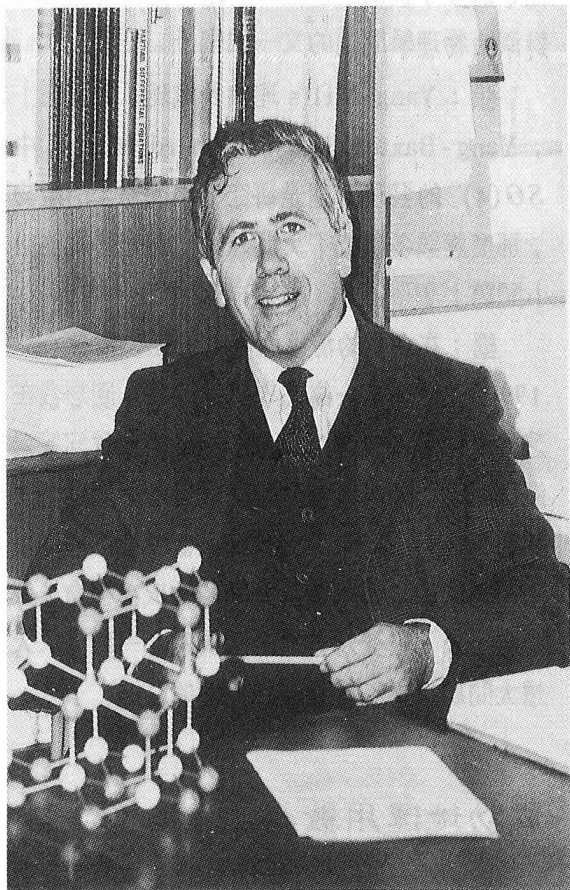
成功地運用數學

張：您所說的第二個成功的原因是什麼？

楊：是要不排斥數學並成功地運用數學，著手規範場理論研究，自然首先要有物理學的目標，而其次的關鍵一步則是要克服數學困難。同樣，在推導 Yang-Baxter 方程時，也是由於不迴避數學困難，運用數學演算技巧，才解決了這一多體問題。沒有數學，這兩項工作都不能順利完成。在物理學家中，我是偏愛數學的。我自學李群，向 Simons 學纖維叢理論，我曾向 Von Neumann 請教過數學問題，Whitney 曾告訴我解方程時要用的拓樸指標定理，Kac 則介紹我讀 M.G. Krein 有關解 Wiener-Hopf 方程的長文。在 Princeton 時，還請過 A. Borel 講拓樸學。從七十年代起，我也和復旦大學的數學家合作研究。總之，我不斷地學數學，用數學，決不排斥數學。

張：那麼，對物理學家來說，是否數學掌握得越多越好？

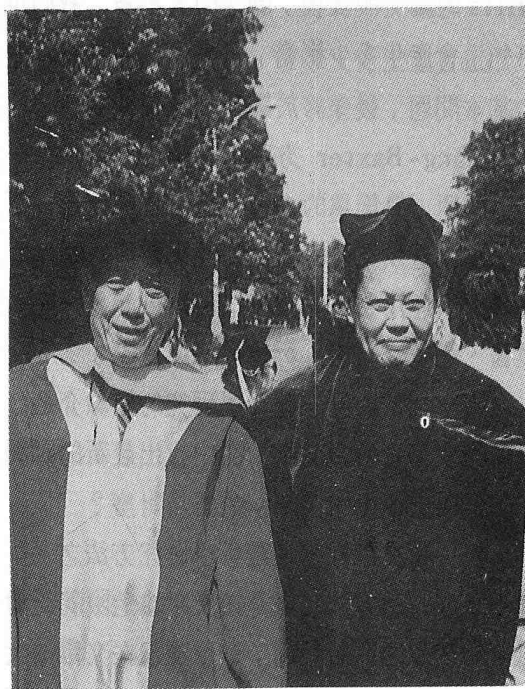
楊：不能一概而論，我曾有一個數學和物



Yang-Baxter 方程中之Baxter 教授

理學的二葉比喻〔26〕，意思是，數學和物理學像兩片對生的樹葉，只在基部有少許公共部份，而它們各自有不同的價值觀念和學術傳統，互相獨立地在生長。因此，物理學家必須按物理學的發展規律行事，只有在了解某數學理論在物理學上的用途時，才下功夫去學，即應該把數學當作工具使用，不能無選擇地亂學一氣。數學有自己的思想方法，你全盤地接受了數學的價值準則，你就會逐漸削弱自己的物理敏感，以至做不出物理學研究了。

張：我注意到，你曾經多次反對年輕人去做遠離物理實驗的、純數學的理論物理學研究。你也說過，Hardy 在〈一個數學家的辯白〔27〕〉裡的觀點，「我以不和任何現實相聯繫而自豪」，不適合應用數學家，當然更不適應物理學家了。



1985 年陳省身先生在 State Univ. of New York (at Stony Brook) 獲榮譽博士學位與楊振寧先生合照。

楊：是的，我動手做實驗的能力不強，曾有笑話說「那裡有爆炸那裡有楊振寧」，可是我十分重視物理學家實驗的結果。物理學家不應去做純數學的理論物理研究，因為成功的機會太小了。至於 Hardy，我很欽佩地，那本〈辯白〉的文字和內容都很精采。一位數學家到了他那個境界，有那樣的看法是可以理解的。純粹數學家按他們的價值觀念行事，應用數學家、物理學家按照另外的價值觀行事，如此而已。

張：您父親楊武之是著名的數學家，您又喜歡數學，為什麼您沒有成為數學家，而走上物理學研究道路呢？

楊：我父親對我的數學影響當然很大，我欣賞數學的價值觀念，讚歎數學的美和力量，與「群論」結下不解之緣，都和「家學淵源」有關。不過我父親並不強制和限定我的學習興趣，我少時就從〈中學生〉雜誌讀過劉薰宇先生的有關置換群的文章，很欣賞，我父親知道了很高興，但僅此而已。一切聽其自然發展，



Yang-Mills Theory 中的 Mills 教授

如果我父親硬要我從小就啃微積分，以致造成心理不平衡，那後果就很難設想了。

張：陳省身先生所致力研究的纖維叢理論，恰是規範場理論的數學基礎，這是一種巧合嗎？

楊：陳先生是本世紀的大數學家。他為整體微分幾何奠定基礎，構造出纖維叢的「陳示性類」的時候，我還是西南聯大的學生。在我發表規範場論文的 1954 年，陳先生也在 Princeton 訪問。但是完全不知彼此工作間的聯繫。1975 年我到陳先生家，向他報告二者間的密切聯繫時，我們都十分驚喜，感嘆造化之巧。陳先生說：「我們碰到的是同一大象的兩個不同部分」〔28〕。這類科學上「殊途同歸」的現象，現在還不能解釋得很清楚。

張：最後，趁此機會，想請你對青年學者談談一般的治學經驗。

楊：我曾對中國科技大學的同學們提出過「三 P」：Perception, Persistence, Power，意思是：直覺、堅持、力量，要有科學

的直覺意識去創造，用堅持不懈的努力去奮鬥，以紮實的知識力量去克服困難，謹以此共勉。

參考文獻

- 〔1〕：楊振寧：對應用數學教學與研究的一些看法（1961），收入南開大學出版社，（1985），pp. 7 ~ 13。
- 〔2〕：Chen Ning Yang：Selected papers（1945 ~ 1980），with Commentary. <楊振寧論文選集>。New York：W.H. Freeman and Company.（1983）. p. 19.
- 〔3〕：米爾斯：規範場。自然雜誌，1987 年第 8 期（上海），英文稿見 Amer. J. Phys. 57, no.6, June, 1989, p. 493 ~ 507.
- 〔4〕：Utiyama, R. Phys. Rev. 101, 1597,（1956）.

- [5] : Mathematical Sciences : a Unifying and Dynamical Resource. Notices of AMS Vol. 33, p. 172. (1986),
- [6] : Mayer, M. E. Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories. Lecture Notes in Physics No. 67, Springer-Verlag (1977). p. 2.
- [7] : 同 [2], p. 74.
- [8] : C. N. Yang : Hermann Weyl's Contributions to Physics, 收入 <Hermann Weyl (1885~1985)>, Springer-Verlag.
- [9] : Pauli, Handbuch der Physik, 2nd ed. (Geiger and Scheel, 1933) Vol. 24, (1), p. 83.
- [10] : Pauli, Review of Modern Physics, 13, 103, (1941).
- [11] : 見 Loos, H. G. J. Math. Phys. 8, 2114~2124 (1967) Phys. Rev. 188. 2342 (1969). Lubkin, E. Ann Phys. (N. Y.) 23. 233. (1963).
- [12] : Wu T. T. and Yang, C. N. Phys. Rev. D 12, 12 (1975), 3845~3847. 收入 [2], 即 [75c].
- [13] : Steenrod : The Topology of Fibre Bundles. Princeton, Princeton University, 1951.
- [14] : Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M., Deformation of Instantons (Oxford-Berkeley-MIT Preprint) April, 1977.
- [15] : Atiyah, M. F. Geometry of Yang-Mills Fields, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei & Scuola Normale Superiore, Pisa (1979).
- [16] : Singer I. M., Some Problems in the Quantization of Gauge Theories and String Theories. Proc. Symposia in Pure Math. Vol. 48 (1988).
- [17] : Atiyah, M. F. Collected Works. Vol. 5, Gauge Theories. Commentary p. 1.
- [18] : Simons : J. (with J.-P. Bourguignon ; H. B. Lawson) Stability and gap phenomena for Yang-Mills fields. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 76 (1979), pp. 1550~1553.
- [19] : 同 [5]。
- [20] : 同 [2], [67e]。
- [21] : Atiyah, M. F. The work of Simon Donaldson. Notices of AMS, Vol. 33, p. 900 (1986).
- [22] : ICM-90 Kyoto, Japan. Notices of AMS. Vol. 37, p. 1210. (1990).
- [23] : 同 [22], P. 1212.
- [24] : Witten E. An interpretation of classical Yang-Mills theory. Phys. Lett. 77. B (1978). pp. 394~398.
- [25] : C. N. Yang and S. C. Zhang : SO(4) Symmetry in a Hubbard Model.
- [26] : 同 [1], P. 399.
- [27] : Hardy G. H. A Mathematician's Apology. Cambridge Univ. Press (1940).
- [28] : 陳省身 : 我與楊家兩代的因緣, <陳省身文選>, 科學出版社, 1989。

——本文作者任教於上海華東師範大學——