戈德爾不完備定理

董世平

戈德爾（Kurt Gödel）於1931年發表了他的「不完備定理」（Incompleteness Theorem），至今正好六十年，爲此，在戈德爾的求學地維也納，特別召開了一個會議，討論戈德爾這個定理所帶來的影響。的確，這六十年來，常在不同的領域內，發現到這個定理的影響，而這個定理在不同領域中的應用，甚至引起了相當的爭議。

哈佛大學於1952年授與戈德爾榮譽科學博士學位，稱他爲「本世紀最重要數學眞理的發現者」（註一），這裏所指的數學眞理即爲「不完備定理」。雖然當時是1952年，但已宣稱此定理是本世紀最重要的數學眞理，可見此定理的重要性，不僅可說是空前，亦可稱爲絕後了。「不完備定理」到底是一個什麼樣的定理？本文將簡介此定理的背景、證明及它對數學、計算機和哲學的影響，盼望大家對這個定理能有較深入的認識與體會。

背景

自第十九世紀後期，「集合」的觀念被提出後，數學家們逐漸的感到，各個不同的數學領域，似乎皆可建立在同一個根基上，就是「集合論」，但是不幸的，過不久邏輯學家們即發現以「集合」這麼簡單，而且直覺上認爲「眞」的概念，卻會產生「反論」（antinomy），即「集合」的概念會產生矛盾，這使得數學家們重新思考數學的基礎到底是什麼？數學會不會出錯？如何面對一個直覺上爲眞，卻會導致矛盾的概念？是放棄「集合」的概念呢？或是如當時頂尖的數學家希伯特（Hilbert）所宣稱的：「沒有人能將我們逐出集合論的樂園!」。若是如此，又將如何面對矛盾呢？

以總共不到17頁的三篇論文，一個年輕的荷蘭數學家布饒兒（Brouwer）對以往古典邏輯的確實性提出挑戰，特別是對所謂的排中律（Law of the excluded the middle），即對任一命題「A」，A或A之否定命題必有一爲眞，他認爲我們不可無條件的接受，布饒兒堅持有其他的可能性，因此也就有了數學哲學中的直觀主義（Intuitionism）學派，若接受了此一說法，連帶的，數學中許多的證明將不再被接受，特別是所謂存在性的證明。例如，要證明某一微分方程式有解，則必須給出一個方法，把這個解找出來，而不可僅證明「若無解會導致矛盾」，而這卻是一般數學家們所常用的方法。希伯特不贊成布饒兒的看法，他認爲若是如此數學的犧牲實在太大了，那麼要如何使數學能立在一個堅固的基礎上呢？爲此他提出所謂的「希伯特計劃」（Hilbert program），即以有限性（finitary）、組合式（combinatorial）的方法，由簡單的理論開始，先證明「數論」有一致性（consistency），即「數論」中不包含矛盾，再以「數論」爲基礎證明「分析」有一致性，再一步步往前推，至終證明數學中不包含矛盾，只要能證明即使使用排中律也不會產生矛盾，那麼儘可放心大膽的去使用排中律，不必像布饒兒那樣束手束脚。

「希伯特計劃」是一個很好的計劃——如果能成功的話。在討論此計劃的成敗之前，我

們先介紹另一個觀念，上文我們說明了一致性。的確，一致性可說是對任一公設系統，最基本的要求，若一個系統內包含矛盾，其他的也就不用再談了，對公設系統我們另一個希望有的性質就是完備性（Completeness）。我們用自然數1，2，3，……來說明這個觀念。我們要證明有關自然數的定理，如「質數有無窮多個」，我們若要將證明整個一步步寫下來，我們必須從某一個公設系統出發，其實任一個證明，都必須從某一個公設系統出發。對於自然數我們最常用的公設系統就是皮亞諾公設（Peano Axioms），這些公設中最複雜而且困難的，（不僅對一般的高中，大學生如此，對邏輯學家亦如此），就是大名鼎鼎的「數學歸納法」。藉著數學歸納法及其他的公設，我們可證明「質數有無窮多個」，問題是「是否所有有關自然數的敍述，只要是對的，就可由皮亞諾公設出發，而得到證明呢？」也就是「皮亞諾公設是否完備？」若皮亞諾公設具有完備性，那麼所有有關自然數的敍述，若是對的，就可由皮亞諾公設證明。

由戈德爾不完備定理而得的一個結論，就是「皮亞諾公設是不完備的！」有些關於自然數的敍述是對的，但皮亞諾公設無法證明它，戈德爾的證明也的確告訴我們如何找到這個敍述，事實上，由戈德爾的證明，我們可得一個算則，給我們一個公設系統，我們就可按此算則，而得到一個算術句型，再經過適當的編譯（compile），即可成爲此系統內的一個句型，而此句型在此系統內爲眞，卻無法在此系統內被證明，所以也許我們會覺得皮亞諾公設不具有完備性，這是它的缺點，我們應當找另一個具有完備性的公設系統來代替它，但不完備定理告訴我們，「任何一個具有一致性的公設化系統皆是不完備的！」這也就是爲什麼雖然大家明知皮亞諾公設是不完備的，但這個公設系統仍是被普遍的使用，因爲任何其他系統，也都是不完備的。也許我們再退一步，皮亞諾公設固然不具有完備性，我們至少可要求它具有一致性吧！也就是皮亞諾公設所證明的，一定是眞的，可惜，這一點也做不到，由不完備定理可得另一個結論就是「在皮亞諾公設系統內將無法證明它的一致性！」從某一方面來說，你須要假設比「皮亞諾公設是一致的」更強或相等的假設，你才能證明皮亞諾公設的一致性，當然我們若須要更強的假設，也就須要更大的信心去相信它是對的。同樣的，皮亞諾公設也沒那麼特殊，就像不完備性的結果一樣，由戈德爾不完備定理，任一個足夠強的公設系統，皆無法證明它本身的一致性，所以要證明數學具有一致性，即數學中不會產生矛盾，你將無法由數學中得到，你必須靠數學以外的東西，也許是你個人的哲學或神學，來相信數學是有意義的，這可說是粉碎了「希伯特計劃」，難怪當希伯特由他的學生伯內（P. Bernay）處聽到戈德爾的這個定理時，他對這一個定理感到生氣（註二），因爲他將無法回應布饒兒的挑戰了，但在眞理面前，人人都須低頭。

敍述與證明

以上簡述了不完備定理的背景，現在我們來敍述不完備定理，一般所謂的不完備定理，分爲兩個部份：

第一不完備定理

任何一個足夠強的一致公設系統，必定是不完備的。

即除非這個系統很簡單，（所以能敍述的不多），或是包含矛盾的，否則必有一眞的敍述不能被證明。

第二不完備定理

任何一個足夠強的一致公設系統，必無法證明本身的一致性。

所以除非這個系統很簡單，否則你若在此系統性，證明了本身的一致性，反而已顯出它是不一致的。

戈德爾的證明過程相當複雜，而其中最核

心的概念，是古典希臘哲學中一個有名的詭論（paradox）；說謊者詭論。紀元前6世紀希臘時代的一個詩人哲學家Epimenides說了一句很有名的話：「所有的克里島人都是說謊的。」這句話有名倒不是因爲它是眞理，正好相反，因爲它一定是錯的，爲什麼是錯的呢？因爲說這句話的人Epimenides就是克里特島人，同樣一句話，別人說也可能是對的，（希望不致冒犯了克里特島人），但是由克里特島人來說，就一定是錯的，爲什麼呢？若這句話是眞的，則Epimenides沒有說謊，和這句話矛盾，所以這句話是假的。我們再舉一個例子來說明這個詭論。

A：B這句話是真的。

B：A這句話是假的。

我們可能會認爲A（或B）這句話非眞即假，且讓我們來看看是否如此，假設A這句話是眞的，即表示B這句話是眞的，故「A這句話是假的」是眞的，故A這句話是假的，和假設矛盾。我們現在假設A這句話是假的，則「B這句話是眞的」是假的，故B這句話是假的，所以「A這句話是假的」是假的，即A這句話是眞的，這又和我們的假設矛盾，結論是，A不論是眞是假都得到矛盾，大家若有興趣，不妨從B句開始，亦得到相同的結果，這就是它之所以被稱爲詭論的緣由。

戈德爾是如何利用這個概念呢？若說：

「這句話是假的。」

那麼利用前面的論證，這句話是矛盾的，所以任何一個一致的公設系統都無法說出這句話來，而戈德爾將上面的這句話改爲

「這句話不能被證明。」

注意，「眞」和「能被證明」並不相等，同樣「假」和「不能被證明」亦不相等。戈德爾證明了在皮亞諾公設內，（其實不需要用到這麼強的公設）可以說出「這句話不能被證明」，若願意接受這件事，我們即可證明不完備定理了，爲證明方便，我們稱「這句話不能被證明」爲A，若在此系統內A被證明了，則由A的意義，即A不能被證明，知道「A」是假的，而在此系統內證明了一個假的敍述，表示此系統是不一致的，故若此系統是一致的，則A不能被證明，則由A的意義得知A是眞的，因它說它不能被證明，因此我們也就找到了一個敍述，即爲A，它是眞的，卻無法被證明。任何一個公設系統若能說出「這句話不能被證明」則此系統若非不一致，就是不完備。爲了確知是否清楚了這個概念，讀者不妨作一個測驗，「沒有眞理！」是眞的嗎？

對數學的影響

何謂數學？對這個問題，不同的人會有很不同的答案，但是每一個數學家所努力的，都是要找到「證明」，從大家所接受的公理或公設出發，找出對某一個題目的證明。從希臘時代，就留下了許多的問題，有許多的問題，經過了數學家們的努力，我們已知道了答案，也就是我們找到了「證明」，如所謂的幾何三大難題，而有些至今尚未解決，如「雙生質數是否無限多？」任何一個問題，我們總是盼望找到「證明」，不論是證明它是眞的，或是證明它是假的都可以，不論是證明「雙生質數是無限多」，或是證明「雙生質數是有限的」，都將是一個非常轟動的結果。若是找不到證明，則認爲也許是自己才智不夠，或是時間尚未成熟，眞的是如此嗎？

1930年希伯特接受Königsberg贈予榮譽市民時，發表了一個著名的演說，演說辭的最後兩句話爲

「我們必須知道，我們將會知道」（Wir müssen wissen. Wir werden wissen.）

當年希伯特的演講所灌製的唱片，現在仍然保存著，我們若仔細聽，仍依悉可聽到希伯特講完這句話時，得意的笑聲（註二）。對著數學抱著如此的信心，相信是極大部份的數學家所共有的，希伯特清楚且有力的表達出來，只可惜

這個信心是沒有根據的，而且沒有多久，就被證明如此樂觀的信心是錯的，因爲1930年11月17日，Monatshefte für Mathematik und Physik 這個期刊接受了當年25歲的戈德爾所投的稿，證明了不完備定理，有些命題是眞的，但無法被證明，數學家也許有信心（事實上由不完備定理可知這個信心是無法證實的）說：「被證明的就是眞的」，但再也無法說：「眞的一定會被證明。」

自戈德爾證明了不完備定理之後，許多數理邏輯學家們即努力去找一個數論中爲眞，但無法用皮亞諾公設證明的敍述，花了將近半個世紀都沒有找到，因此也就有人說戈德爾所指的「爲眞但無法證明」的命題，可能和眞正的數學無關，即一個眞正研究數學，而非研究邏輯的數學家，將永遠不會遇到這樣的命題，不完備定理是邏輯上的一個有趣的定理，但對數學沒有影響，所有的數學問題，如「雙生質數是否無限多？」，我們仍遲早會知道答案。1978年Paris和Harrington 終於找到了組合學Ramsey理論中的一個命題，它是眞的，但無法用皮亞諾公設證明，後來其他的學者又陸續發現了許多這樣的命題，（有興趣的讀者可參閱「數學傳播」第10卷第4期的「數學歸納法」一文）。對任何一個數學命題，我們當然要想法子證明它是眞的，或找反例證明它是錯的，若是都不成功的話，也許該聽聽不完備定理所給的建議，嘗試去證明「此命題無法被證爲眞」，或「此命題無法被證明爲假」，以往數學家只有兩條路可走，證明是眞的，或證明是假的，如今又多了兩條路，不能被證明是眞的，和不能被證明是假的。要提醒大家注意的，就是第三條和第四條路彼此並不相斥，集合論中有名的「連續假說」（Continuum Hypothesis），即被證明以現有的集合論公設，無法證明它爲假（戈德爾1936年的結果），亦無法證明它爲眞（Paul Cohen 1963年的結果）。

對電腦的影響

戈德爾於1931年發表了不完備定理時，還沒有現今所謂的電腦，對於電腦如何發明的，至今仍衆說紛紜，我們引用普林斯頓高等研究院1978～1979年度報告中所摘錄曾任美國國家科學院副院長的Mac Lane的一段話：「戈德爾偉大而抽象的邏輯工作，有個令人驚異的結果。在分析戈德爾所描述的何者可被一步步程序所得的正式方法中，年輕而聰明的英國邏輯家圖林（Alan Turing）定出了這程序所得的結果，即**一般遞歸函數**（general recursive functions），這也正是一台機器所可能計算的，藉著這個分析，及其在 John Von Neumann 等人身上的作用，以致現代計算機的理論觀念及分析得以開展，直至今日，對於何者可被計算的理論描述，及至更深入的分析，我們可正確的說，仍然根植於戈德爾於1931年所發表的數理邏輯論文中。」（註一）

我們再舉兩個較近的例子：電腦病毒與人工智慧。對於電腦病毒，幾乎所有使用電腦的人都遇到過，人人聞之色變，因爲感覺防不勝防，事實上，的確如此。我們不時看到警告，又有某種新的病毒出現了，然後解毒專家們再設計一個新的解毒程式來破解它，在廣告中常看到說某種解毒程式如何如何有效，可解多少多少種病毒，腦筋動的快的人，也許會想，爲什麼不設計一種萬靈丹？可解所有已知及未知的毒，別的不說，錢肯定是可賺得不少，當然也可能有些人會想設計出一種病毒是殺不死的，戈德爾不完備定理告訴我們的是，「沒有萬靈丹」，也「沒有殺不死的病毒」，對任何解毒程式，我們皆可設計出一種病毒，使得這個解毒程式殺不死它，同樣對任何病毒，我們都可設計出一個解毒程式，把這個病毒殺死。總之，不論是放毒或解毒的人，都不會沒事幹，我想這是個壞消息，也是個好消息（註三）。

電腦能不能跟人腦一樣？電腦和人腦的差別在那裏？這是常被提出的問題。使電腦跟人腦一樣，這是人工智慧學家努力的目標。英國劍橋大學的數學物理學家，亦爲皇家學會的院士Roger Penrose 對這個問題，寫了一本出乎他自己意料之外暢銷的書：「The Emperor's New Mind」。1990年7月2日的時代雜誌也報導了這本書，而時代雜誌用了一個唯恐天下不亂的標題「那些電腦都是笨蛋！」(Those computers are dummies)，的確，此書一出又引起了正反雙方的論戰，Penrose 當然提出許多論證來支持他的論點，即人工智慧是有其限度，他最重要的論證即根據戈德爾不完備定理，事實上，這個論證早就被提出過，另外一本使戈德爾較爲人所知的書，即爲得1979年普立茲獎(Pulitzer Prize)的書「戈德爾，艾叟，巴哈」(Gödel, Escher, Bach)，作者Hofstadter 分別以艾叟的畫，巴哈的音樂來闡述戈德爾的定理，就像Penrose 的書，這本書也是介紹人工智慧，夾議科學哲學的書，Hofstadter 同樣以不完備定理說明人工智慧所會受到的限制，但Hofstadter 對人工智慧的發展是樂觀的。

對哲學的影響

現今人類發現似乎有太多的問題無法解決，有各式各樣的「危機」，如能源危機、道德危機、人口爆炸危機等等，而常有「無力感」，但在本世紀初期，人類展望二十世紀是充滿了盼望與信心，當然當時也有許多問題有待解決，但面對未來大家都是樂觀的，特別是對「理智」的信心非常強，相信憑著理智所有的問題都可解決，數學不就是個明顯的例子嗎？十八、十九世紀數學的成就是驚人的，如從希臘時代就留下來的所謂「幾何三大難題」，竟然一次就都被解決了，也難怪希伯特對科學說：「我們必須知道，我們將會知道」，自然須交出它所有的問題，而人類必將所有的問題一一克服，所以當不完備定理一出來，對許多人來說彷如晴天霹靂，Kline 寫了一本書，書名爲「基礎找到了，又失去了！」(Foundation found, and lost)很能描繪出這個心情，人們認爲找到了數學的基礎，卻發現這個基礎是海市蜃樓，而且不完備定理似乎告訴人們，我們將永遠無法找到這個基礎，連數學這號稱最精確的科學尚且如此，其他所有的知識又如何立足呢？不完備定理告訴我們，有些事情是眞的，但我們無法證明它，若是如此，人要如何面對沒有被證明的事？既無法全部接受，亦不該全部否決，如何決定取捨呢？這似乎是人人都可以也應當思考的問題，而不僅僅是哲學家所必須面對的問題。

不完備定理的發現至今已超過六十年了，這個定理的重要性，不僅未隨時間、歷史背景的改變而減退，人們在不同的領域中，正逐漸發現它的意義與影響，只可惜由於國內對邏輯的研究者不多，至今尙沒有一本合適的中文書證明或闡明此定理，對此定理證明有興趣的讀者可參考H. B. Enderton 所著的「A Mathematical Introduction to Logic」。

今年亦爲國內的數理邏輯的前輩劉世超博士的七十歲生日，謹以此文敬賀劉教授七十歲，亦盼望邏輯此一領域在大家繼續的努力下，在國內能生根，開花，結果。

附　註

註一：The Institute for Advanced Study Annual Report, 1978/1979.

註二：Constance Reid, "Hilbert", Springer-Verlag.

註三：William Dowling, Computer Viruses：Diagonalization and fixed points, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 37, No. 7, p. 858～861.

（本文作者任敎於中原大學數學系）