丘成桐先生演講——

微分幾何的歷史與發展

時間：80年11月5日
地點：中正大學應數所

賴玲淑
劉榮彰 記錄

今天我想講講微分幾何的歷史和發展，講這部分當然是有很多的主觀概念在裡面，所以可以看作是我本人對這方面的觀點，不一定是每個人都同意，這是第一點。第二點大概會講一些幾何的歷史，這部分的歷史，我不是專家，我並沒有去將歷史文獻仔細的看，我們是古爲今用，將歷史上的解釋當作是我今天的看法，而無論對錯，主要的目的表示我對數學上的某種看法。

首先來看幾何的問題。什麼是幾何？首先我們在做一個研究時，我們先考慮爲了什麼原因來研究幾何。幾何其實很簡單，只是一個圖畫在裡面。我們第一點要精確，明瞭的描述靜態與動態的幾何圖形，這是個很大的問題，而什麼叫做幾何圖形，這是個很重要的觀點，可在二維、三維，甚至 n 維空間去探討。事實上，在物理上也可看出幾何圖形，如一個粒子在引力場的軌跡。

第二點我們藉著簡單的工具，使用簡單的方法去建構圖形，例如在古典的平面幾何可用圓規與直尺便能建構出很多觀念（而圓規與直尺就是簡單的工具），可從一個三角形建構一些性質，甚至建構更複雜的圖形，另外如在現代的幾何可考慮常微分方程（O.D.E.）或偏微分方程（P.D.E.），如解

$$\Delta u = f$$

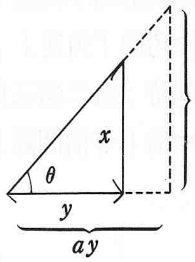
再從解出來的 u 即可描述其圖形。所以上述二點是幾何上的主要命題，又這二個問題，從古到今都是幾何學家要研究的命題。

又對於建構的問題，可分做存在性（Existence）和唯一性（Uniqueness），而存在性相當於給一些訊息（information）去建構圖形以滿足原先的訊息，而唯一性通常是不對的，如同樣的訊息可拼出多種圖形，因此必須探討所謂moduli（模基）的問題，那就是說我們需要用多少個參數（parameter）去描述所有滿足這些條件的圖形（對等於方程式所有的解）。對我而言，基本上所謂存在性與唯一性的問題是幾何上主要的觀點，實際上就會得到不同的幾何。學例來說，爲了研究幾何的問題，我們往往會探討「對稱性」（symmetry）。

研究對稱性在物理上和幾何上是很重要的觀點，往往用了而不自知。從古典幾何到現代幾何的發展是與自然現象平行的，學個例子來說，對稱性是用來幫助瞭解唯一性與模基

(moduli) 的重要觀念。在平面幾何上學

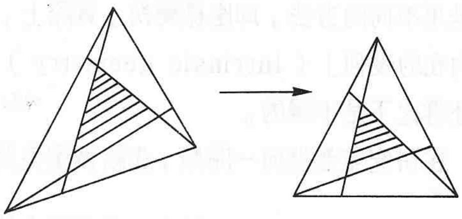
(1) $\tan\theta$ 的觀念說明：



$$\tan\theta=\frac{x}{y}=\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y},\quad a\neq 0$$

則 $\tan\theta$ 是一個在scaling之下的不變量（invariant）。

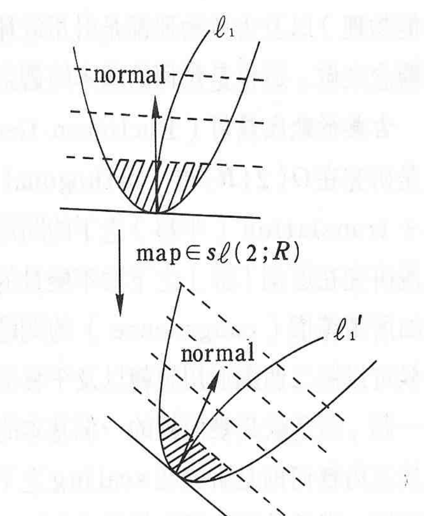
(2)研究面積（area）的觀念：考慮群 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$，亦即考慮矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 $ad-bc=1$，則 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，其映射後的面積與原面積相等，即面積在群 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 之下是一個不變量。而研究對稱性（相當於不變量）的主要功用在簡化幾何問題。舉個例來說：我們知道「面積」是在 $s\ell(2,\boldsymbol{R})$ 的作用下不變的。如果我們想要證明一個有關於面積的定理，就可以借用 $s\ell(2,\boldsymbol{R})$，例如在古典平面幾何裡有一個定理是如此說的：將三角形的三邊等分成三段，再將頂點與對邊的點連起來，就將三角形分成七份（如圖），其中斜線部分的面積就是原來的七分之一，我們可以利用 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 群，將



原來三角形轉換成正三角形，這樣以後，就可以將面積的計算簡化，這是利用「不變量」去將問題簡化的一個例子，不僅如此，我們亦可利用群（Group）的觀念將圖形分類（classify），然後以各別的類來做研究。近代物理（高能物理）以及古典物理都是引用這種對稱群的觀念來做，這也是幾何的基本的觀念。

古典的歐氏幾何（Euclidean Geometry）是研究在 $O(2;\boldsymbol{R})$ 群（orthogonal group）＋translation（平移）之下的問題，也就是說研究在這個「群」之下的不變量的問題，例如所謂等價（congruence）的問題，什麼時候可以將二個圖形用旋轉以及平移的變換湊在一起，這是歐氏幾何裡的一個基本的問題，至於三角幾何則是研究在scaling之下不變量的問題，那就是說除了旋轉群（$O(2;\boldsymbol{R})$）。我們還要考慮乘上一個正數的不變量，後來發覺歐氏幾何裡頭，很多都不重要，其實很多問題都是在研究某些點和某些線什麼時候連接起來，三點共線的問題，即相對應於投影幾何（Projective Geometry），也就是只注重直線與直線間的關係，而不注重角度（Angle）的大小問題，以後發展出很多重要的定理，主要發展到近代的投影幾何，即所謂代數幾何（Algebraic Geometry）。代數幾何的發展比從前的幾個群大的多了，從前研究 $O(2;\boldsymbol{R})$ ＋translation，以及scaling，是比較小的群。

而現在研究幾何不變量的性質在 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ ＋translation之下，亦即仿射幾何（Affine Geometry）。舉個明顯的例子說明仿射幾何：如隨便給個曲線（curve），經過一個函數屬於群 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$，得到另一個曲線，普通在歐氏幾何裡可研究法線的觀念，因在歐氏幾何裡，有角度（Angle）和長度（Length）不變量的觀念，但在仿射幾何並沒有角度的觀念，因它在 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 之下，不是個不變量，那如何去定義在仿射幾何裡法線（normal）的觀念？因爲面積、平行線和切線在群 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 之下是不變量，所以取一串平行線（平行於切線），取其與曲線相交的面積之各別重心（其重心經過 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 映射是不變的），連接成一曲線，叫做 ℓ_1，再取與 ℓ_1 相切之直線，此

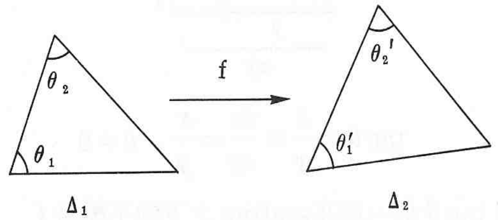


直線就定義為法線，這與歐氏空間的法線是不同的。

也許有人會問「為何要這樣做？」主要的原因是在仿射幾何裡建構圖形（construct picture），有興趣的部分只跟面積有關的觀念，用這種觀念去簡化題目，例如在二維空間裡的橢圓經過 $s\ell(2;\boldsymbol{R})$ 轉換為圓，則很多關於橢圓的問題就可用圓裡頭的工具去簡化問題。

在高維度的情形，主要是找群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ ＋ translation，取裡頭的一子群（subgroup）G ＋ translation 去研究不變量的問題。亦即探討二個幾何圖形 M_1，$M_2\subset R^n$，何時 M_1 等價於（$\simeq$ equivalence）M_2？立刻，就有個等價的問題，如有二個幾何結構 M_1，M_2 在對稱群（譬如 G＋translation），我們要問何時能將 M_1 的幾何結構帶到（carry）M_2 的幾何結構，使得它們在 G＋translation 之下是等價的。舉例來說，我們研究平面上的曲線。我們要問何時二條曲線是等價的？好比說一個橢圓什麼時候與一個圓是等價的。所謂等價只考慮在群（$O(n)$＋translation）的作用之下，這時候我們知道當橢圓的面積與圓的面積相同時，它們是等價的。這是一個比較簡單的問題，因為我們對橢圓以及圓的圖形十分瞭解，一般而言，問題就困難多了。通常來說，要找不變量來決定等價問題，在此定義，若 $f\in$Group（群），$M_1\xrightarrow{f}M_2$，找 M_1 裡的不變量與 M_2 裡的不變量，若這些不變量相等，則說 $M_1\simeq M_2$（equivalent）。

例：二個三角形的不變量（在 scaling 之下）就是三個內角的「角度」，當二個三角形的二個內角相等時，這二個三角形就是等價的。這是幾何學中的「等價問題」。



若 $\theta_1=\theta_1'$，$\theta_2=\theta_2'$

$\Rightarrow\Delta_1\simeq\Delta_2$ under scaling

又整個微分幾何，所謂局部幾何（Local Geometry）大部分是等價問題。例如黎曼幾何，所謂黎曼幾何就是給一個方法去研究，任意給二點，如何去量其之間的長度，然後多給定一個條件，即在空間很小時看成與歐氏空間一樣，簡單說，即局部像歐氏空間（這個是黎曼幾何的 axiom），因此在局部時，歐氏空間裡的許多定理都可適用，如畢氏定理等。

黎曼幾何的不變量是考慮在同胚群（diffeomorphism group）之下，就是座標變換（change coordinate），在此座標變換下，黎曼幾何的結論是一樣的，這是什麼意思呢？舉個例子，就是研究地球上的地理，將地球的地圖畫起來，用不同的投影方法得到不同的地圖，但因地球只有一個，其測度應是一樣的，只是用不同的方法，即座標變換，實際上，其「內在的幾何」（intrinsic geometry）在同胚群之下是不變的。

在研究黎曼幾何一開始，先給個黎曼度量 $ds^2=\sum\limits_{i,j}g_{ij}\,dx^i\,dx^j$。以後，考慮所有的不變量使得對應的座標變換或同胚群不變的量，在二維空間即所謂高斯曲率（Gauss curvature）K，在 n 維空間即所謂曲率張量（curvature tensor），基本上，即黎曼幾何裡

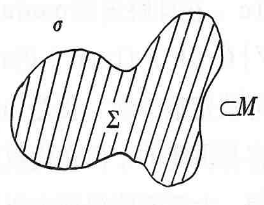
的等價問題可用曲率張量來描述，也就是說曲率張量可以決定黎曼測度在同胚群之下。

在黎曼幾何第一個遇到很大的同胚群，這使幾何在二十世紀受到很重要的影響，可看做對稱的觀念的推廣，第二個就是所謂Gange群的觀念，就是在整個黎曼流形（manifold）上面，有時候要研究一些纖維叢（fiber bundle）的問題，即研究在空間M（manifold）上面函數的變化，甚至研究向量値函數（vector valued function）在流形M上的變化。我們發現單單研究函數與向量値函數是不夠的，還要容許函數可以整合在一起（twist together），舉例來說，在球面上，考量切向量場（vector field），因在球面上切向量本身不能寫做一個函數，要看做纖維叢上的一個量，就是把流形M寫成許多coordinate charts的聯集，亦即$M=\bigcup_i U_i$，其中U_i是coordinate chart，Vi，考慮在每一個coordinate chart U_i上，定義的向量値函數V_i，我們要將這個局部的量連起來，方法是利用矩陣函數g_{ij}，亦即存在$g_{ij}(x)$屬於群$GL(n;R)$使得$V_i=g_{ij}(x)V_j$在$U_i\cap U_j\neq\phi$（empty）的地方。即在二個不同的coordinate charts相交的部分，定義$x\rightarrow g_{ij}(x)$，其中$x\in U_i\cap U_j$。而這種在相交的地方，把向量場連起來的方法。可看做一個無限維的群，叫做Gange group。一般探討幾何上的性質是不變的在Gange群之下，因Gange群只不過將全部的幾何問題用座標系統寫下來，但本身不具有什麼一定的幾何意義，而所有有興趣的幾何的量主要是不變的在Gange群之下，亦即對稱在Gange體裡。

考慮這二個對稱群（同胚群和Gange群）是這幾十年研究微分幾何的重要部分，這跟物理上有很密切的關係，即同胚群相對應於gravity（Einstein方程），而Gange群則對應於Yang-Mills方程，這是二個在二十世紀中很重要的命題，有時在微分流形上有些特殊的結構我們須要探討的，這時我們就要找一些較小的群，例如在微分流形上有複變結構（complex structure）的話，我們則要求Gange群能保持這複變結構，所以說對稱群的觀念是與微分流形上的結構有關的。從這個觀念出發，我們引進global invariants。又再從Gange群引進很重要的不變量即所謂Pontryagin classes和Chern classes，其中Chern classes是利用度量（metric）的曲率的觀念定義出同調群（cohomology classes），記做$C_i(V)$，就是矢量叢V可引進Chern classes，而Chern classes是矢量叢（vector bundle）的主要不變量，又若$V_1\cong V_2$，其中V_1，V_2是規範場在Gange群之下，可推得$C_i(V_1)=C_i(V_2)$，反之，則不一定成立，但差不了多遠，現在仍有人在研究到底差多遠的問題。

再來研究模基（moduli）的問題，單從拓樸的觀點裡，沒有這個問題，而從Gange群的觀點，模基（moduli）問題是比較離散（discrete）的問題，在此不討論。又假如M是一個複變流形，要求vector bundle是holomorphic bundle，即要求Gange群是holomorphic。在此時去看moduli的問題，亦即考慮$\{V\mid C_i(V)\text{ fixed}\}$的moduli space，即可決定唯一性。但是moduli space是不容易研究的，但在代數幾何裡是個很重要的問題。大家都曉得前十年Donaldson利用moduli space討論在M^4裡，解決出很多出名的拓樸學（topology）上問題。而Donaldson的工作中用到C. Tanbes的存在性定理（Existence Theorem）：假如給定一組Chern classes C_i，問題主要問是否存在一個M上的矢量叢V，使得$C_i(V)=C_i$，這是一個存在性的問題，即是一個P. D. E.的問題。但整個問題發展到後來與P. D. E.（偏微分方程）是無關的，其實這是一個拓樸學上（所謂Poincare conjective）的問題，表面上

看來與O.D.E.(常微分方程),P.D.E.無關,但最後仍將之reduce到一個P.D.E.解的存在性的問題。在我個人看來,存在性的問題在微分幾何上是十分重要性,在這近百年來,存在性的問題在其發展扮演了一個重要的角色,許多幾何上的問題,研究到後來總有一個存在性的定理。舉例來說:(一)**Hodge理論**:微分形式(differential form)怎麼表示的問題,基本上是解MAXWELL方程,這是Yang-Mills方程的一個特殊情形。即每一個differential form w可以表示成$w=$Harmonic form$+d(\theta_1)+\delta(\theta_2)$ 。而如何將一個微分形式表示成調和形式(Harmonic form)的問題,這個harmonic form的存在性對等於解MAXWELL EQUATION。而整個Hodge理論在微分幾何,甚至代數幾何的發展佔了一個很基本的角色,而這理論整個決定於一個存在定理。(二)**最小曲面(minimal surface)在黎曼流形*M*存在的問題**:即給定一條封閉曲線σ,於一個黎曼流形中要找到一個曲面Σ,使得$\partial\Sigma$ (Σ的邊界)等於σ,同時Σ的面積(area)要最小,這是一個P.D.E.的存在性問題。最初由Doerglas,Merry所解決,



而後在微分幾何的發展有長遠的影響。這種存在性的證明不但在微分幾何中很重要,甚至在微分方程中亦占了重要角色。例如一些quasi-linear的橢圓方程的發展都是與minimal surface有不可分的關聯性。我們可以說quasi-linear橢圓方程是由minimal surface問題發展出來的。

還有許多存在性定理在微分幾何裡的影響,今天沒有時間多講。基本上,整個微分幾何是以對稱群來描述,且對稱群以不同的面貌出現,而最後的工具要用偏微分方程來解決。但經由對稱性我們可以將許多幾何觀念弄的很清楚,例如從度量(metric)出發,我們可以找許多不變量,如曲率張量等,由這些不變量我們可以更容易瞭解我們的幾何物體(object),但這還不夠,最後我們仍要問反過來的問題:是不是這些不變量就可以決定了幾何的結構,就是說當二個幾何結構有相同的不變量時,這二個結構是否就相等。往往我們要靠P.D.E.的方法。當然我們有一點沒有提及的就是用代數(algebra)的方法,這是從formal power series的觀念發展出來的,這是代數幾何常用的一些方法,其實也是存在性的證明,只是以不同的方法進入而已,即Weier stus方法,幾十年來在代數幾何得到許多結果,這是用分析的方法所不能得到的。我們不能不佩服,但同樣的,有許多分析上的結果,代數的方法也不能得到,這並不是批判這二種方法孰優孰劣,而是說明我們用不同的方法,會得到不同的結果。今天我們要闡釋的主題(theme)是:整體而言,微分幾何是由這對稱觀念來推動的,在高能物理方面由對稱的觀念出發是與微分幾何一樣的,所以很自然的微分幾何與高能物理有密不可分的關係,謝謝!!

——本文演講者任教於美國加州大學聖地牙哥分校,現應國科會之邀,在清華大學數學系客座一年;記錄賴玲淑、劉棠彰現就讀中正大學應數所——