

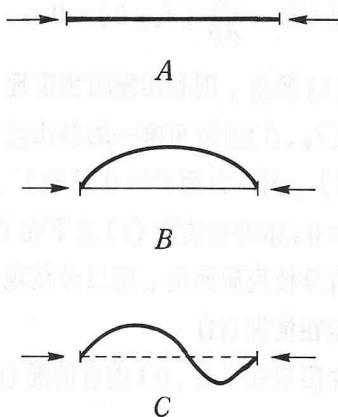
分枝現象與理論

林松山

§ 1. 簡 介

近二、三十年來，分枝現象 (bifurcation phenomena) 及理論 (bifurcation theory) 在數學及自然科學上受到格外的重視及研究。

首先我們來看看一個經常可見到的現象。拿一根細長的金屬棒。在棒的兩頭向內稍稍用力，此時棒不會彎曲。當力量夠大時，則棒會彎起來。再繼續加大壓力，棒可能會彎了兩彎。其變化如下圖：



在此實驗中，我們可用兩個量來描述。一為壓力 λ ，另一為角度 θ ，此角度是量金屬棒在左端與水平方向所張開的角度。若以 λ 為橫軸 θ

為縱軸，畫一幅分枝圖 (bifurcation diagram)，則上述現象可清楚在圖 1 表現出：

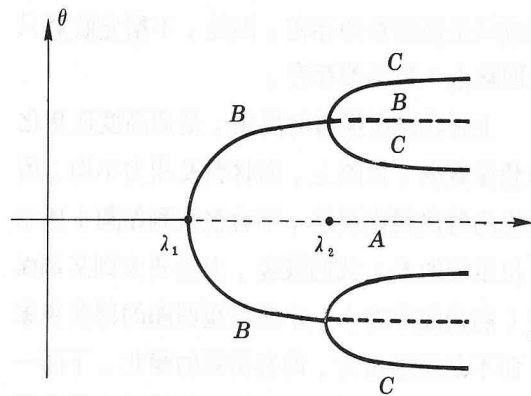


圖 1

集合 $A = \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\}$ 表示棒子不變形，不彎曲的狀態，通常稱為主枝 (main branch 或 trivial branch)。而當 $\lambda = \lambda_1$ 時，由主枝 A 長出新枝 $B = \{(\lambda, B_\lambda) : \lambda > \lambda_1\}$ ，通常稱爲分枝 (bifurcation branch)。沿著 B 當 $\lambda = \lambda_2$ 時又長出另一新枝 $C = \{(\lambda, C_\lambda) : \lambda > \lambda_2\}$ 。若以 A 為準，則 C 爲第二次分枝 (Secondary bifurcation branch)。在上述情形，當 λ 爲 λ_1 及 λ_2 時，稱爲臨界態 (critical)，在此時由主枝長出新枝來。

在研究分枝現象時，至少我們希望能了解下面的幾個問題：

(甲) 在何處主枝會長出新枝來？

- (乙)分枝時，會分出多少枝？
- (丙)分枝前後，主枝及分枝的穩定性如何變化？

(丁)新的分枝能長出多遠？

以圖 1 為例，則上述問題可回答如下：

(甲)在 $(\lambda_1, 0)$ 由主枝 A 長出分枝 B ，然後在 $(\lambda_2, B_{\lambda_2})$ 由主枝 B 長出分枝 C 。

(乙)每次長出二分枝，此分枝對 A 或 B 對稱。

(丙)當新枝長出後，原主枝就失去穩定性（

圖 1 中用虛線表示），而新枝則為穩定態（用實線表示）。

(丁)新分枝皆可拉到無窮遠，即 $\lambda > \lambda_1$ 或 $\lambda > \lambda_2$ 。

值得注意的是，穩定性的交換是個重要的變化。因為不穩定的狀態，在自然界是觀測不到或只是極短暫的存在。因此，不穩定狀態只是理論上、數學的存在。

上述我們所描繪的現象，是個高度理想化的想像實驗。實際上，因材料及用力不均，所呈現的彎曲變化現象，不會整齊到如圖 1 所示。但重要的是：我們發現，力量要大到某個程度（超過臨界力），才能發現明顯的彎曲現象。而不是稍稍用力，即有明顯的變化。下面一節，我們嘗試用一個簡單的數學模式來說明圖 1 所示的現象。

§ 2. 簡單的分枝理論

圖 1 牽涉到兩個量 (λ, θ) ，因此我們設想此圖中的 A, B, C 三枝，皆為方程式

$$F(\lambda, \theta) = 0 \quad (1)$$

的解。 F 為平滑函數，對 λ 及 θ 皆可微分任意多次。

首先，我們先來觀察 F 在 λ 為臨界時，是否有特異之處。為簡便起見，我們只看 A 變 B 的情形，即 $(\lambda_1, 0)$ 附近 F 的行為。因為一開始假設 A 為 (1) 之解，因此對任一 $\lambda > 0$ 皆

有

$$F(\lambda, 0) = 0. \quad (2)$$

因此，對任一 k 皆有，

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, 0) &= \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}(\lambda, 0) = \dots \\ &= \frac{\partial^k F}{\partial \lambda^k}(\lambda, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

現在，我們若把 F 在點 $(\lambda_0, 0)$ 做二次的泰勒展示，並利用 (2) 及 (3)，即可得到：

$$\begin{aligned} F(\lambda, \theta) &= \frac{\partial F}{\partial \theta}(\lambda_0, 0)\theta + a_{11}(\lambda - \lambda_0)\theta \\ &\quad + a_{02}\theta^2 + R^2(\lambda, \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

此處

$$a_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \theta}(\lambda_0, 0),$$

$$a_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\lambda_0, 0)$$

為泰勒係數而 $R_2(\lambda, \theta)$ 為二次泰勒餘式。

在 (4) 中，最低次項為 $\frac{\partial F}{\partial \theta}(\lambda_0, 0)$ ，其是

否為 0 密切地影響著 (1) 的解。因此我們需分成下面兩種情況來討論：

情況 (i) $\frac{\partial F}{\partial \theta}(\lambda_0, 0) \neq 0,$

情況 (ii) $\frac{\partial F}{\partial \theta}(\lambda_0, 0) = 0.$

若情況 (i) 發生，則利用隱函數定理，則 (1) 的解在 $(\lambda_0, 0)$ 附近可唯一的解出並可寫成 $\theta = \theta(\lambda)$ 。另一方面 $\theta \equiv 0$ 為 (1) 之解。故 $\theta(\lambda) \equiv 0$ 亦即在情況 (i) 之下在 $(\lambda_0, 0)$ 處不會有分枝現象發生。所以分枝現象若要發生，必定在情況 (ii)。

現在假設在 $(\lambda_c, 0)$ 處有情況 (ii) 發生，亦即：

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\lambda_c, 0) = 0. \quad (5)$$

此時，我們稱 F 在 $(\lambda_c, 0)$ 退化 (degenerate)

。我們接著繼續討論 (1) 是否在此退化點產生分枝。代 (5) 式進入 (4) 式中，我們可得：

$$F(\lambda, \theta) = \theta \{ a_{11}(\lambda - \lambda_c) + a_{02}\theta + \widetilde{R}_2 \} \quad (6)$$

此處， $\widetilde{R}_2 = R_2(\lambda, \theta)/\theta$ 。當

$$a_{11} \neq 0, \quad (7)$$

利用隱函數定理，(6) 式裡大括號內為零的解可唯一的解出並寫成 $\lambda - \lambda_c = g(\theta)$ 。進一步，若

$$a_{02} \neq 0, \quad (8)$$

則 $g(\theta) = m\theta + g_1(\theta)$ ，此處 $m = -a_{02}/a_{11} \neq 0$ ，而 $g_1(0) = g_1'(0) = 0$ 。亦即我們有下列的分枝圖。

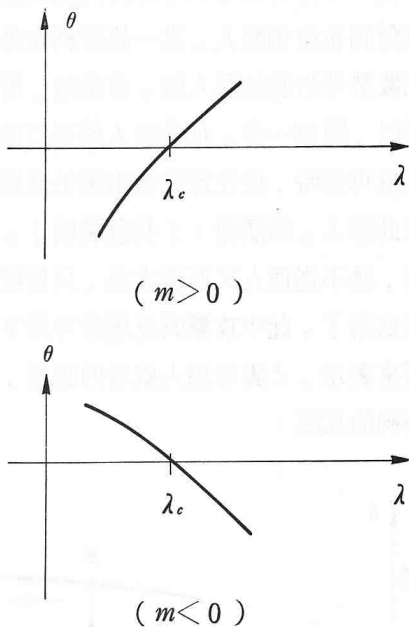


圖 2

很明顯地，條件 (8) 成立時，所得的圖 2 與圖 1 不同。因此若要得圖 1，我們必須要求

$$a_{02} = 0. \quad (9)$$

在此情形下，我們需要看三次的泰勒展式：

$$\begin{aligned} F(\lambda, \theta) &= \theta \{ a_{11}(\lambda - \lambda_c) + a_{12}(\lambda - \lambda_c)\theta \\ &\quad + a_{21}(\lambda - \lambda_c)^2 + a_{03}\theta^2 + \widetilde{R}_3(\lambda, \theta) \}, \end{aligned} \quad (10)$$

此處， a_{ij} ， $i + j = 3$ ，為 F 在 $(\lambda_c, 0)$ 三次

泰勒展式的係數， \widetilde{R}_3 為三次泰勒餘式 R_3 除上 θ 。當

$$a_{03} \neq 0, \quad (11)$$

則 (10) 式裡大括號的解可唯一寫成

$$\lambda - \lambda_c = \ell\theta^2 + g_3(\theta), \quad (12)$$

此處 $\ell = -a_{03}/a_{11} \neq 0$ 而 $g_3(0) = g_3'(0) = g_3''(0) = 0$ 。如此，當 $\ell > 0$ ，在 $(\lambda_c, 0)$ 處我們得到如同圖 1 在 $(\lambda_1, 0)$ 處的分枝圖。若 $\ell < 0$ ，則分枝圖開口向左，圖形在 $\lambda < \lambda_c$ 。

綜觀上述的討論。當條件 (7) 成立時，在 $(\lambda_c, 0)$ 皆能長出新的分支來。條件 (7) 我們通常稱為交叉條件 (transversality condition)。總結來說， F 在 $(\lambda_c, 0)$ 退化，亦即滿足條件 (5)，是在 $(\lambda_c, 0)$ 分支的必要條件。一般而言，單單退化不見得一定會分枝。但是若 F 在 $(\lambda_c, 0)$ 退化且交叉，即同時滿足條件 (5) 及 (7)，則必有分枝在 $(\lambda_c, 0)$ 發生。因此 (5) 及 (7) 是分枝的充分條件。

當然，若條件 (11) 不成立，亦即 $a_{03} = 0$ ，則需要考慮四次的泰勒展式。若 (7) 不成立，即 $a_{11} = 0$ ，則整個討論將更形繁雜。此方面的探討，通常以奇值理論 (Singularity Theory) 名之。

再回顧一下本節所用的數學方法裡只有兩個重點，一為泰勒展式 (即本期田光復教授稱之為分析之 Heart)，另一為隱函數定理。隱函數定理在高等微積分，甚至在微積分都學過，在分析裡是非常有用的定理，經常可見其芳踪。

在第 1 節中金屬棒的彎曲現象，可用下述的簡化模型來描述：

$$u''(x) + \lambda \sin u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (12)$$

$$u(0) = 0 = u(1). \quad (13)$$

此常微分方程有時稱為歐拉變形方程 (Euler buckling Eq.)。此處參數 λ 與力量的大小及金屬棒的彈性有關。 $u(x)$ 與變形的程度有關。其解，我們可以用橢圓函數完全寫出。另一

方面，我們也可用分枝理論來處理。此時，分枝的點出現在其相應的線性固有值方程

$$V''(x) + \lambda V(x) = 0, x \in (0, 1), \quad (14)$$

$$V(0) = 0 = V(1), \quad (15)$$

的固有值 $\lambda_n = n^2 \pi^2$ 處。 $u \equiv 0$ 表示不變形的狀態。有關分枝理論的數學書可參閱參考資料 1。

§ 3. 更多的分枝現象

本節中我們再來看幾個典型又有歷史性的分枝現象。

例 1：平流 (Laminar flow) 到紊流 (Turbulent flow)。若觀察水管、水溝或江河中的水流。當水流的流速小時，水流就較平而有序。而當流速增大，則漸漸成複雜的水流，終至波濤洶湧。此時，以流速當參數 λ ，則水流的型式依 λ 的增加由簡入繁。早些年，蘇俄的物理學家 Landau 就提出從平流到紊流的一個模型：經無窮多次的分枝所造成的現象。但近年來的數學理論及流體力學觀測，似乎不必經過無窮多次的分枝，即可到達非常複雜的混沌 (Chaos) 狀況，請見下面二例。

例 2：大氣預測與勞倫茲吸子 (Lorenz attractor) 勞倫茲在研究大氣物理時，把描述流體運動的 Navier-Stokes 方程簡化成含三個未知函數的非線性常微分方程組。中間含有物理參數 λ 等。他發現這個看起來不起眼的三個方程組，竟然表現出與通常二個未知函數的非線性方程組有極大的差異。在他的三個方程組問題裡，可能一開始兩個相差一點點的初期狀態 (initial states)。到後來，在歷經很複雜的軌跡後，有很大的差異。從而得到要長期預測天氣幾乎是不可能的事！詳見參考資料 2。

例 3：疊代映射 (Iteration Map)。考慮有一個由閉區間 $[0, 1]$ 映射到它自己的連

續函數 $f(x)$ 。今用疊代法去計算：

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots,$$

而令 x_0 為給定的 0 與 1 間的初始值。

若有一 $\bar{x} \in [0, 1]$ 及正整數 p 使得疊代 p 次後有 $\bar{x}_p = \bar{x}$ 且 $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j, i \neq j$ 且 $0 \leq i, j \leq p-1$ 。則稱 \bar{x} 為週期 p 的解。若取 $f(x) = x(1-x)$ ， $\lambda \in [1, 4]$ 。漸漸地，變大 λ ，則可找到週期 2, 4, 8, …, 2^n 的週期解。而李天岩教授及其老師 J. Yorke 更發現，若有週期 3 的解，則有混沌出現。詳見「參考資料 2」及李教授在本刊的文章 (47 期及 51, 52 期)。讀者也可自己用 PC 玩玩看上述的有趣的疊代現象。

例 4：受驚嚇的狗。野狗人見人厭也人怕。但野狗也會怕惡人。當一條野狗在外頭碰到一個做勢要打牠的惡人時，常常地，野狗會夾著尾巴，閃到一旁。但是惡人真要打牠，而牠又無處可逃時，往往野狗會由驚怕進而發怒而反擊此惡人。俗語說：「狗急跳牆」。但若牆太高，跳不過而人又逼得太急，只好咬人衝開一條血路了。此中攻擊與反應常可用下面的分枝圖來表示。 λ 表示惡人威脅的程度，而 θ 表示野狗的反應：

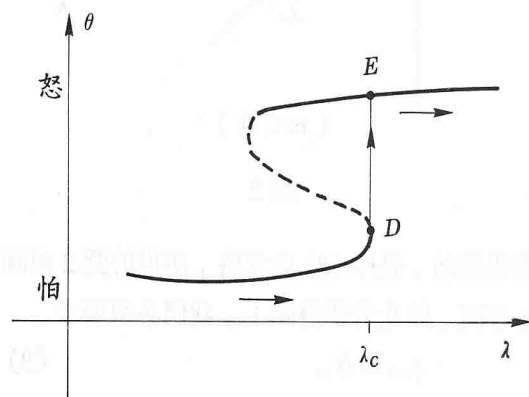


圖 3

圖 3 裡，當惡人的威脅還不到臨界點 λ_c 時，野狗是在怕的狀態，能逃則逃。但狗若覺得牠受到的威脅已經無法忍受時，即 $\lambda > \lambda_c$ ，則在驚怒之下，只好放牙一搏了。相當於在圖 3 中由

狀態 D 直接跳上狀態 E 。所以我們最好謹記老祖宗的名言：「得饒狗處且饒狗。」這種突然產生非常激烈反應的變化，在生物及社會科學上是常見的。如男女朋友間的突然來電。或個人因挫折、失望、羞辱進而發怒、尋仇、報復等等皆是。所謂「老羞成怒」即是。只是這些科學，很難量化，因此很難判定兩國間的敵意發展到什麼程度就走向戰爭，或人民不滿到什麼程度就會起而革命。但這種突然激烈反應的現象在劇變理論（Catastrophy Theory）裡有所討論。

§ 4. 結 語

自然界一些現象，若用數學來描述，經常是一些非線性的問題。而這些問題常隨某些參

數的增加而顯現由簡至繁的變化。分枝理論就是用來研究此類問題的重要工具。近年來，隨著計算機及計算機數學的發展使人們在研究此繁雜問題時又多了一道利器。研究此複雜問題是目前也是將來，對數學家及科學家的一項深具挑戰性的重要工作。

參考資料

1. S. N. Chow 及 J. Hale, Method of bifurcation theory, 六藝。
2. 混沌, J. Gleick, 林和譯, 天下文化出版有限公司, 1991。
3. 全方位的無限, F. J. Dyson, 林篤中譯, 出版社同上, 1991。

——本文作者任教於交通大學應數系、所——

中央研究院數學研究所

招考研習員簡章

本所為鼓勵有志研究數學及其應用之青年繼續深造，特提供一年期研習員之進修機會。

一、資格 數學相關學系（大學，研究所畢業或應屆畢業者）。

二、考選

1. 凡具備上述資格並有志從事研究工作者，請備齊下列文件：

- 大學（及研究所）成績單一份
- 教授推薦函兩封
- 履歷表一份
- 讀書計畫一份

於民國八十一年三月十日以前寄達本所（台北市南港區 115 研究院路二段 128 號，中央研究院數學研究所呂素齡小姐收，電話：(02) 7851211-382）。

2. 本所審核上述文件後，決定考試應試人員名單。考試將在四月上旬舉行，內容以數

學系之基礎課程為主，應試人員之專長科目為輔。考試時間確定後將分別通知應試人員。

3. 在外島服役而報名應試者，得保留應試資格，於退伍後再行參加口試，但務必在八十一年三月十日以前完成報名手續。

三、研習

1. 一年研習期自八十一年七月一日開始。八十一年七月以後退伍之男生可視個別情況延遲報到。

2. 研習員期滿合格者，由本所出具研習證明書。

四、待遇 研習員依其學歷，分別比照助理研究員、助理員（食宿自理）。

五、歡迎來函索取簡章及本所研究人員研究專長表（請附回郵信封）。