非標準微積分簡介

鄭穗生

1.引　言

微積分發展之初，即有利用無窮小的概念以走捷徑方式推導不少常見之式子。萊布尼茲本人即注意到這類無窮小可能是某種數字而且具有類似實數之性質。不幸他本人及其追隨者未能對此有所發揮，而讓極限論獨尊微積分理論基礎三百餘年。直到 1960 年，魯濱遜始賦予無窮小概念嚴謹之理論基礎，這種獨尊的情形才告消失。以無窮小概念寫成的大專微積分於 1976 年出現〔2〕。不但如此，說明無窮小理論基礎的數學方法（魯濱遜稱為非標準分析法〔3〕），由於能彌補古典分析法部份缺陷與不足，已經在泛函分析、機率論、複變函數論、數論、數學物理方法以及數學經濟方法上取得極大成就〔1，3〕。

本文試圖將非標準微積分基礎概念，作一整理介紹，以饗讀者。

2.超實數

微積分基本目標之一，是描繪事物屬性間各關係（實變函數）以及發展一套處理這些關係的數學工具（如導數及積分）。其中一項重要工具即為極限法。究其實質，極限法是一種賦予函數「該有的值」的方法。例如，賦予 $1+2+3+\cdots\cdots$「該有的值$+\infty$」；利用割線斜率與坐標的函數關係賦予曲線在某點該有的斜率為導數等等。其實，極限法並非唯一賦值方法。回想在沒有無理數時，為了賦予單位方形斜邊長度的值。我們可利用有理數列定義出無理數 $\sqrt{2}$ 。基於同樣精神，我們也可以實數列$<r_1, r_2, \cdots\cdots>$製造一類新的數集：我們任找一個可將自然數N分為大小兩類，而且有限的自然數集必屬小類的有限測度 m（確實定義見附錄）。兩實數列$<a_1, a_2, \cdots\cdots>$，$<b_1, b_2, \cdots\cdots>$稱為幾乎處處相等，如集合 $\{n \mid a_n=b_n\}$ 屬大類。不難驗證，幾乎處處相等關係為一定義在所有實數列$<r_1, r_2, \cdots\cdots>$上的等價關係。這樣，我們即成功定義出一類超實數 $^*R$ 集合，其中每一元素為一含所有幾乎處處相等數列之等價集〔$<r_1, r_2, \cdots>$〕（以後為了方便，該集合以代表$<r_1 r_2, \cdots>$表示）如果現在我們再進一步定義

$$<a_n>+<b_n>=<a_n+b_n>$$

$$<a_n>\cdot<b_n>=<a_n\cdot b_n>$$

$\langle a_n\rangle<\langle b_n\rangle$如 $\{n \mid a_n<b_n\}$ 屬大類。

則不難驗證 $^*R$ 具類似實數R之所有代數及次序性質。不但如此，在

$$a \in R \rightarrow <a, a, \cdots\cdots> \in {}^*R$$

之意義下，不妨將 R 視作 $^*R$ 之一子集（而且下面即作此假定）。顯然，$^*R$ 還包含非實數。事實上，$^*R$ 包含「無窮小」及「無窮大」。

定義：對所有正實數 a 都成立 $-a<x<a$ 之超實數 x 稱無窮小。對某正實數 a 成立 $-a<x<a$ 的超實數 x 稱有限，而非有限之超實數稱爲無窮大。

例如，0，$<1, 1/2, 1/3, \cdots\cdots>$，$<1, 1/4, 1/9, \cdots\cdots>$ 爲無窮小；$<n>$ 爲正無窮大，$<-n^2>$ 爲負無窮大。今說明 $<1, 1/2, 1/3, \cdots\cdots>$ 爲無窮小如下：對任一實數 a，數列 $<1, 1/2, 1/3, \cdots\cdots>$ 中，除有限項外，所有其他的項皆處於 $-a$ 及 a 之間，即爲證明。

3.無窮小，有限超實數以及無窮大

無窮小相乘或無窮小之線性組合爲無窮小，非零無窮小之倒數爲無窮大，零爲唯一之實無窮小，等等之理易由定義推知。其他較複雜之情形則可由運算推出。舉例如下。

例：當 $\epsilon \neq 0$ 是一個無窮小，則 $\dfrac{5\epsilon^5+4\epsilon^4+\epsilon}{2\epsilon}$，由於等於 $\dfrac{5}{2}\epsilon^4+2\epsilon^3$，爲無窮小。

例：當 H 是一個正無窮大時，則 $\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}$，由於等於 $\dfrac{3}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H-1}}$，爲一無窮小（這裏要先證明無窮大之平方根爲無窮大）。

上述無窮小及無窮大運算法與極限法運算極爲類似。對於有限超實數，我們還有下述定理：

標準部存在定理：任一有限超實數 x 必可表爲唯一之實數 a 以及唯一無窮小 ϵ 之和。

此定理中之存在性可由實數之完備性（見〔1〕）推出。唯一性是因爲如 $x=a_1+\epsilon_1=a_2+\epsilon_2$，則 $a_1-a_2=\epsilon_2-\epsilon_1$ 爲實無窮小，故必爲零。

上述定理中之實數 a 稱爲超實數 x 之標準部，記爲 $st(x)$。換另一種說法，我們不妨稱二相差爲無窮小的超實數 a，b 爲無限接近（記爲 $a \approx b$）則一超實數 x 必與唯一之實數 $st(x)$ 無限接近。無窮小之標準部顯然爲零。

標準部之計算可基於下列性質：如 a，b 爲有限超實數，則 $st(a \pm b)=st(a) \pm st(b)$，$st(ab)=st(a)st(b)$，$st(a/b)=st(a)/st(b)$ 如 $st(b)\neq 0$，$st(a^{1/n})=(st(a))^{1/n}$ 如 $a \geqslant 0$ 及 n 爲正整數，$st(a) \leqslant st(b)$ 如 $a \leqslant b$。

例：已知 $st(x)=2$ 而且 $x \neq 2$，則

$$st\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-4}\right)=st\left(\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\right)$$

$$=\frac{st(x)+3}{st(x)+2}=\frac{5}{4}。$$

例：已知 H 爲一正無窮大，則

$$st\left(\frac{5H^3-3H}{7H^3+4H}\right)=st\left(\frac{5-3/H^2}{7+4/H^2}\right)$$

$$=\frac{st(5)-3st(1/H^2)}{st(7)+4st(1/H^2)}=\frac{5}{7},$$

（注意，H^2 爲無窮大，$1/H^2$ 爲無窮小，故 $st(1/H^2)$ 爲零。

4.超實數函數及自然擴張

定義域與值域爲超實數的函數稱超實數函數。部份超實數函數可由實函數以一極自然方法定義而成。設 $f: R \rightarrow R$，對 $<r_1, r_2, \cdots> \in {}^*R$，定義

$$^*f(<r_1, r_2, \cdots>)=<f(r_1), f(r_2), \cdots>$$

超實數函數 $^*f$ 稱爲 f 的自然擴張。這裏要注

意一點，實數$<a,a,a,\cdots\cdots>$亦記作a，故有$^*f(a)=f(a)$。

有了上述準備工作後，賦值方法，除了極限之外，也可透過下述方法達成。

定理：設$f:R\to R$。如對所有無限接近，而不等於實數a的超實數x，$^*f(x)$無限接近實數A，則$\lim_{x\to a}f(x)=A$。反之亦成立。

這定理的證明不難，主要是利用$\lim_{x\to a}f(x)=A$的充要條件爲$f(x_n)\to A$對所有以a爲極限的數列$<x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots>$成立（見〔1〕）。

例：設$f(x)=x\sin(1/x)$，$f(0)$可任定。設x爲非零之無窮小，$st(x)=0$，$x\neq 0$。則由於$|x\sin(1/x)|\leqslant|x|$，所以$^*f(x)$亦爲無窮小，故其標準部爲零。即$\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0$。

例：函數$f:R\to R$在點$a\in R$連續之充要條件爲$x\approx a\Rightarrow{}^*f(x)\approx f(a)$。

例：連續實函數f,g之複合$f\circ g$必連續：如$x\approx a$，則$^*g(x)\approx g(a)$，故$^*f(^*g(x))\approx f(g(a))$！

例：函數$f:R\to R$在點$a\in R$有導數b之充要條件爲$x\approx a$，$x\neq a\Rightarrow\dfrac{^*f(x)-{}^*f(a)}{x-a}=b$。

例：如：$g:R\to R$在點a可導而且$f:R\to R$在點$g(a)$可導，則$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$。

這事實之證明如用極限法會稍稍有一點技術上之困難。但利用非標準分析法，則極爲容易。事實上，設$x\approx a$，$x\neq a$。如$^*g(x)={}^*g(a)$，則

$$\frac{^*f(^*g(x))-{}^*f(^*g(a))}{x-a}=0\approx 0$$
$$=f'(g(a))g'(a)。$$

如$^*g(x)\neq{}^*g(a)$，則

$$\frac{^*f(^*g(x))-{}^*f(^*g(a))}{x-a}$$
$$=\frac{^*f(^*g(x))-{}^*f(^*g(a))}{^*g(x)-{}^*g(a)}\cdot\frac{^*g(x)-{}^*g(a)}{x-a}$$
$$\approx f'(g(a))g'(a)\ !!$$

5.積　分

上節例題說明導數可經由非標準分析法定義。同樣，積分也可透過黎曼和作爲分割長度的函數的自然擴張達成定義。簡單來說，對於一定義於區間〔a,b〕上之實函數f，取正數h，並在〔a,b〕上取分點$a,a+h,a+2h,\cdots\cdots,a+nh,b$；這裏$n$是使$a+nh\leqslant b$成立之最大整數，則黎曼和

$$S(h)=f(a)h+f(a+h)h+\cdots\cdots+f(a+nh)h+f(b)(b-a-nh)$$

是h的函數。如$h\approx 0$而且$h\neq 0$時，$^*S(h)$是有限超函數，則其標準部稱爲f在〔a,b〕上之積分。

不難證明，如f連續，$^*S(h)$必爲有限超實數（故積分存在）。另外，積分中值定理及可加性亦成立。既然如此，則微積分基本定理成立，而且積分與一般定義之黎曼積分無異。

6.結　語

上面只描述了非標準分析法之極小部份。但數學核心問題之一：合理衡量自然事物屬性大小及推導計算方法，除了極限法外，非標準分析法亦能提供，此正是本文以微積分爲例所試圖說明之主要目的。由於省略部份細節，讀者可另外參考如〔1，2，3，4〕等之著作，以究其竟，並加發揮。

附註：在第二節中之測度m，爲一衡量所有正整數N子集大小的尺度：

1. $A, B \subseteq N, A \cap B = \phi \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$。
2. $A \subseteq N \Rightarrow m(A) = 0$ 或 1。
3. $m(N) = 1$。
4. 如A有限，則$m(A) = 0$。

測度爲1之正整數子集爲大類，爲0的是小類。

參考文獻

1. Lindstrom, T. *An invitation to non-standard analysis*, London Mathematical Society Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988., pp. 1～105.
2. Keisler, H. J. *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.
3. Robinson, A. *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966 (2nd, revised edition 1974).
4. 邊均伯，張茂根，極限的新概念，宇航出版社（中國大陸），1988。

——本文作者任教於清華大學數學研究所——