沙氏定理

(Sard's Theorem)

金周新

一、引　言

以金錢爲信仰，便要做金融分析；以做事爲信仰，便要做選情分析；以爭戰爲信仰，便要做敵情分析；以作夢爲信仰，便要做心理分析〔1〕；以自白爲信仰，便要做理性分析〔2〕；如果我們以眞理做爲信仰，就要做科學分析。而數學是科學之母，科學分析又不得不借重數學分析了。〔3〕

到底什麼是分析？分析不外質與量的探討，本質透過作用（Morphism），在我們的測度空間（Measure space），得到具體的量（Measure）。

如何分析？分析的過程千頭萬緒，可是大千世界總在裡許。我個人認爲不妨先在以下七個定理下些眞參實證的工夫，或許會會心一笑。

(i) 沙氏定理（Sard's theorem）；
(ii) 隱函數定理（Implicit function theorem）；
(iii) 傅氏定理（Fourier theorem）；
(iv) 級數定理（Degree theorem）；
(v) 指數定理（Index theorem）；
(vi) 固定點定理（Fixed point theorem)；
(vii) 同倫定理（Homotopy theorem）。

而其間自有重要定理當做橋樑，相互溝通。其中最具魅力的當屬沙氏定理，它告訴我們什麼問題可分析、如何分析，却分析不到。以數學語言來敍述：如果以作用的變化（Differentials of Morphisms）來分析，作用本身的臨界值所構成的集合是可測的，但測到的「値」是零。這個定理看似簡單，影響極其深遠，可用兩句成語「天有不測風雲」和「一『沙』一世界」來道盡，不敢獨鍾！〔4〕

二、沙氏定理的歷史發展

基本存在定理（Fundamental theorem of existence）說明了可分析函數的存在性，至於對應空間的特性，也就是和空間維數的關係，一直要到1913年，布理斯（Bliss）提出了一個解析關係，將一維和二維空間，兩個可解析函數的存在性做了重要說明：如果在某些點的亞可比（Jacobian）等於零，解析函數仍然是存在的。

1916年，歐斯古德（Osgood）〔6〕證明了任意多個參數，三個以上函數組的存在定理。

1926年，諾布（Knopp）和史密斯（Schmidt）〔7〕建立了正好 n 個參數，正好 n

個實函數的關係，並指出這些函數只要是一次微分連續就可以了。

1935年，布朗（Brown）〔8〕引申諾、史的結果至任意有限多個參數，任意有限多個函數的存在定理。

幾乎同時，惠特尼（Whitney〕〔9〕利用康特集的觀念，給了一個具體的例子。這個例子將康特集視爲連續函數的臨界點（Critical points），回過頭來重建這函數。

函數臨界集的行爲，引起了摩斯（Morse）〔10〕的興趣。至於臨界值的測度，要等到1942年，沙氏才立下了一個里程碑。

這個新的契機，指引史梅爾（Smale）〔11〕，走向證明無限維空間上的沙氏定理。他的證明中，引入了非線性福爾得荷姆（Fredholm）運算子，將測度爲零的值視爲缺點（Defect number），而這些缺點正是運算子的指數（Index），理所當然，其測度爲零。

瞭解沙氏定理的精神，就可反過來任意建沙氏定理的版本了。對了！我們還沒有提到其精神呢！它的精神是先尋找一些隱晦中的明，靜觀這些明來自何方，再作用一下！

至於沙氏定理如何影響今天的數學，不勝枚擧，在這裡我們擧兩個最簡單的小例子來解釋。

三、例　子

何曼（Herman）〔12〕曾討論過在黎曼空間那些函數的臨界點是在畸異邊界上。蘇利文（Sullivan）〔13〕更將碎形邊界所成的極限集區分成五大類：

(i) 具超吸引週期循環的立即盆井；

(ii) 具吸引週期循環的立即盆井；

(iii) 具拋物週期循環的立即盆井；

(iv)具無理無心週期環的西哥盤（Siegel Disk）集。

(v) 何曼環所成的集合。

其中最有趣的是何曼函數 $f(z)=\frac{e^{i\theta}}{z}(\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z})^2$，$\alpha, z\in C$，$\theta\in R^1$，它給了我們新的第五類何氏環。其想法從黎曼映射平方、反射、旋轉一個角度，經重覆疊代無限多次而成。

這個函數是無法想像地豐富，只要我們將 α 或 θ 値稍稍變化，其圖形就有萬種風情。令 $\alpha=0.025+i0.043$；如圖一，$\theta=(0.98/5)\pi$；如圖二，$\theta=(1/5)\pi$；如圖三，$\theta=(1.006/5)\pi$；我們可以靜觀這些點如何收斂，畸異周界如何形成。如圖四，$\theta=(1/4)\pi$，我們可以印證所想的一般情形 $\theta=(1/n)\pi$，$n\in Z^+$ 是否正確。如圖五，$\theta=(3/8)\pi$，如圖六，$\theta=\frac{7}{10}\pi$，我們可以發現新的奇魅子（Strange attractor）。當然無限多個奇魅子可從 $\theta=(m/n)\pi$，m, n 爲互質整數找到。（**編註**：圖一～圖六請見封底裏）

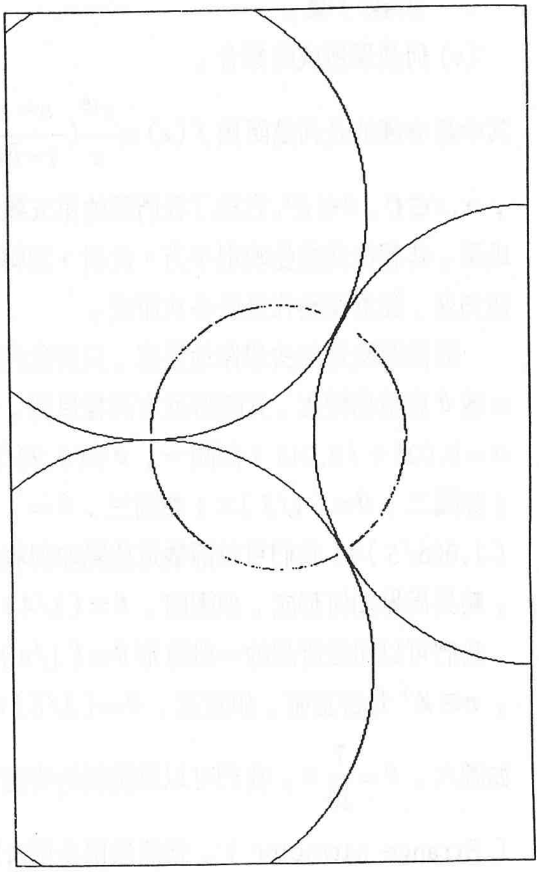
其證明就是沙氏定理的黎曼空間版本〔14〕。

另一個例子是討論非歐氏碎形的建立，我們將三個圓相切可找到自我反射的極限集，如圖七。如圖八，可求得無限多內切圓的緊緻堆疊。如圖九，多加一個外切圓，可求得有限範圍內的自我反射極限集。如圖十，多加一個內切圓，可求得有限範圍內的自我反射極限集。不難證明圖九和圖十的極限集互成對偶關係。如圖十一，我們可同時做三個相切圓的內外切圓，不難證明其極限集是擴至整個複數平面的。

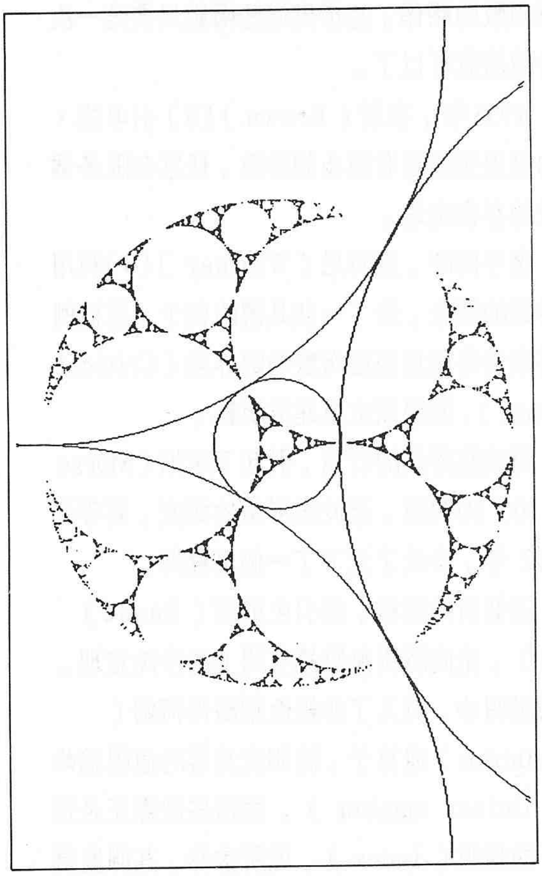
其證明就是沙氏定理的克氏群（Kleinian group）或非歐幾何空間版本〔15〕。

現在，就讓我們看看沙氏定理，然後一步步地證明吧！

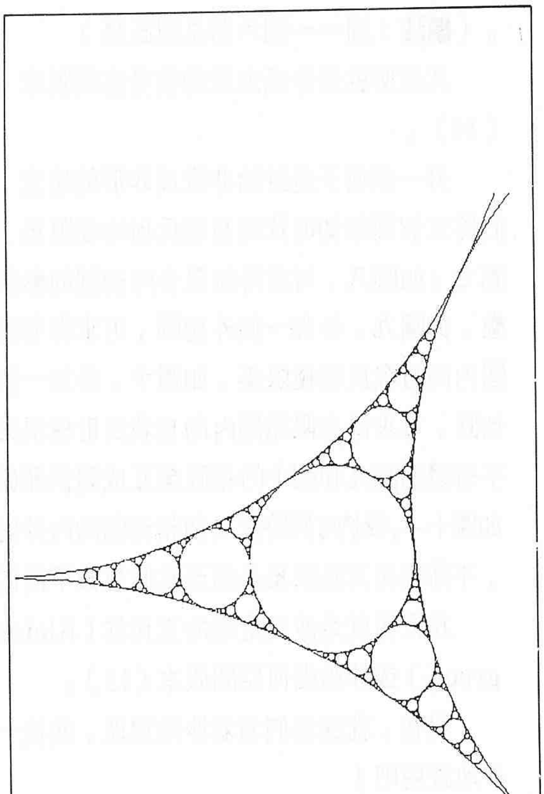
四、沙氏定理及其證明〔16〕



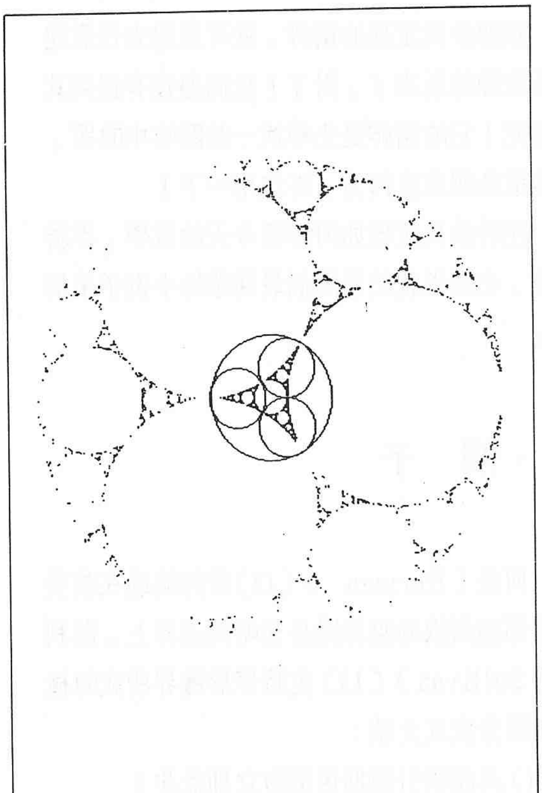
圖七



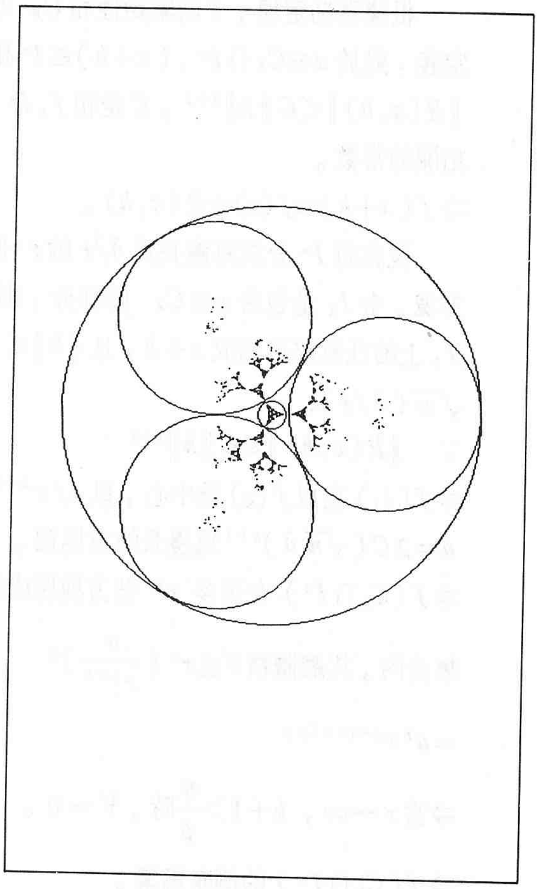
圖九



圖八



圖十



圖十一

首先定義臨界集 C 。

定義：$C=\{\,x\in U \mid f: U\to \boldsymbol{R}^p\ ,\ U\subset \boldsymbol{R}^n$ ，且爲開集，df_x 的秩$<p\,\}$

沙氏定理：f 是一個平滑映射，C 爲臨界集，則 $f(C)$ 的測度爲零。

證明定理前我們先觀察一些既有事實：

(i) $d1=0$

$d^2x=0$

$\vdots$

$d^i x^{i-1}=0$

$\vdots$

(ii) $f(x)$ 爲解析函數，具泰勒展開式，其臨界值所成集合的測度，可從 (i) 求得。

(iii) 如 f 值域的空間，其維數不爲 1 ，將它拉回至超平面，利用熟知的傅賓尼 (Fubini) 定理求其測度。

(iv) 傅賓尼定理告訴我們，如果一可測集 $A\subset \boldsymbol{R}^p=\boldsymbol{R}^1\times \boldsymbol{R}^{p-1}$ 和每一個超平面（常數）$\times \boldsymbol{R}^{p-1}$ 相交在一個 ($p-1$) 維測度爲零的集合內，則 A 的測度爲零。

想法定了，定下步驟：

定義：

$C_1=\{\,x\in U \mid df_x=0\,\}$

$C_2=\{\,x\in U \mid d^k f_x=0\ ,\ k\leqslant 2\,\}$

$\vdots$

$C_i=\{\,x\in U \mid d^k f_x=0\ ,\ k\leqslant i\,\}$

$\vdots$

故 $C\supset C_1\supset C_2\cdots\cdots\supset C_i\supset\cdots\cdots$ 構成一封閉的遞減續列。

第一步證明 $f(\,C-C_1\,)$ 的測度是零。

第二步證明 $f(\,C_i-C_{i+1}\,)$ 的測度是零。

第三步證明 當 k 足夠大時，$f(C_k)$ 的測度也是零。

輪廓定了，嚴格證明：

(i) 第一步：

$n>p$ 定理顯然成立。

$n\leq p$ $\quad p=1\Rightarrow C=C_1$ 定理顯然成立。

$p=2$ 時，

對於 $\bar{x}\in(\,C-C_1\,)$，我們可找到一個開鄰域 $V\subset \boldsymbol{R}^n$，使得 $f(\,V\cap C\,)$ 的測度爲零。

$\because \bar{x}\notin C_1$，存在一偏微分 $\partial f_1/\partial x_1|_{\bar{x}}\neq 0$

考慮對映 $h: U\to \boldsymbol{R}^n$，$h(x)=(\,f_1(x), x_2,\cdots\cdots, x_n\,)$ 。

$dh_{\bar{x}}\neq 0$

$\Rightarrow h$ 將 $\bar{x}$ 的鄰域 V 映成至一個開集 V'，且 dh, dh^{-1} 連續。

$\Rightarrow g=f\circ h^{-1}: V'\to \boldsymbol{R}^p$

$\because g$ 的臨界集 C' 正是 $h(\,V\cap C\,)$

$\Rightarrow g$ 的臨界值集 $g(C')=f(\,V\cap C\,)$

證明 $g(C')$ 的測度爲零如下，

$(\,t,\ x_1,\cdots\cdots,\ x_n\,)\in V'$

$\Rightarrow g(\,t,\ x_1,\cdots\cdots,\ x_n\,)\in t\times \boldsymbol{R}^{p-1}\subset \boldsymbol{R}^p$

令 $g^t:(\,t\times \boldsymbol{R}^{n-1}\,)\cap V'\to t\times \boldsymbol{R}^{p-1}$，則

$g^t = g|_{\partial R^p}$。

$\because \quad \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \partial g_i^t/\partial x_j \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x \in t \times R^{n-1}$，是 g^t 的臨界點$\Longleftrightarrow$

$x \in t \times R^{n-1}$，是 g 的臨界點。

根據數學歸納法知道

在 $t \times R^{p-1}$ 上，g^t 的臨界集的測度為零

$\Rightarrow g$ 的臨界值集和每一超平面 $t \times R^{p-1}$ 相交於一個測度為零的集合內。而且 $g(C')$ 是可測的。

根據傅賓尼定理，集合 $f(C')= f(V \cap C)$ 的測度為零。

第一步證明完畢。

(ii) 第二步：

對於 $x \in (C_k - C_{k+1})$，存在一偏微分

$$\frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{n+1}}} \neq 0 \text{。}$$

令 $s_1 = 1$，函數 $\omega(x) = \left.\dfrac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}\right|_{\bar{x}}$

$= 0$，$\left.\dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x_{s_1}}\right|_{\bar{x}} \neq 0$。

考慮對映 $h: U \to R^n$，$h(x) = (\omega(x), x_2, \cdots\cdots, x_n)$。$h$ 將 $C_R \cap V$ 映至超平面 $o \times R^{n-1}$。

h 將 $\bar{x}$ 的鄰域 V 映成至一個開集 V'，且 dh, dh^{-1} 連續。

$\Rightarrow g = f_0 h^{-1}: V' \to R^p$

令 $\bar{g}: (o \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$，則 $\bar{g} = g|\partial R^p$。同理，如 (i)，可證 $\bar{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$，其測度為零。

(iii) 第三步：

令 $I^n \subset U$ 是一個邊長為 δ 的方塊，k 足夠大（$k > n/p - 1$）。欲證明 $f(C_R \cap I^n)$ 的測度為零。

根據泰勒定理，I 的緊緻性和 C_R 的定義，對於 $x \in C_k \cap I^n$，$(x+h) \in I^n$ 和 $\|R(x,h)\| < C\|h\|^{k+1}$，$C$ 是和 f, I^n 相關的常數。

$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + R(x,h)$。

現在對 I^n 分成每邊長為 δ/r 的 r^n 個方塊。令 I_1 是包含 $x \in C_k$ 的部分，則 I_1 上的任意點可寫成 $x+h$，且 $\|h\| \leqslant \sqrt{n}(\delta/r)$。

$\because \quad \|R(x,h)\| \leqslant C\|h\|^{k+1}$

$\Rightarrow f(I_1)$ 在以 $f(x)$ 為中心，以 a/r^{k+1}，$a = 2C(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$ 為邊長的方塊裡。

$\Rightarrow f(C_k \cap I^n)$ 在至多 r^n 個方塊所成的集合內，其總體積 $V \leq r^n \left(\dfrac{a}{r^{k+1}}\right)^p$

$= a^p r^{n-(k+1)p}$

$\Rightarrow$當 $r \to \infty$，$k+1 > \dfrac{n}{p}$ 時，$V \to 0$。

$\Rightarrow f(C_k \cap I^n)$ 的測度為零。

沙氏定理證明完畢。

五、結　論

信仰不可測，便要求諸「或然」；分析不可測，便要求諸新的統計理論；應用於物理上，如何分析不可測的宇宙，和宇宙的分佈。而沙氏定理如何幫助我們建立此一新理論，讓我們拭目以待吧！

參考資料

1. Frued S., "*The Origins of Psychoanysis*", Basic Books, Inc., Publishers, New York, (1977).

2. Cohen L. J., " *The Dialogue of Reason — An Analysis of Analytical Philosophy*" , Oxford Press, (1986).
3. Fromm E., " *Psychoanalysis and Religion* ", Yale Univ. Press, (1969).
4. Sard A., " The Measure of the Critical Values of Differentiable Maps ", *Bull. of A.M.S.*, Vol. 48, PP. 883～890, (1942).
5. Bliss G. A., " Foundamental Existence Theorems ", *Colloquium Publications of A.M.S.*, Vol. 3, Part 1, (1913).
6. Osgood W. F., " On Functions of Several Complex Variables ", *Trans. of A.M.S.*, Vol. 17, pp. 1～8, (1916).
7. Knopp K. and Schmidt R., " Funktionaldeter — minanten und Abhängigkeit von Funktionen ", Math. Z., Vol. 25, pp. 373～381, (1926).
8. Brown A. B., " Functional Dependence ", *Trans. of A.M.S.*, Vol. 38, pp. 379～394, (1935).
9. Whitney H., " A Function not Constant on a Connected Set of Critical Points ", *Duke Math. Joul.*, Vol. 1, pp. 514～517, (1935).
10. Morse A. P., " The Behavior of a Function on Its Critical Set ", *Ann. of Math.*, Vol. 40, No. 2, pp. 62～70, (1939).
11. Smale S., " An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem ", *Amer. Joul. of Math.*, Vol. 87, pp. 861～866, (1965).
12. Herman M.R., " Are there Critical Points on the Boundaries of Singular Domains ? ", *Commun. Math. Phys.*, Vol. 99, pp. 593～612, (1985).
13. Sullivan D., " Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I, II, III ", Preprint I.H.E.S., (1982～1983).
14. Tsai T. R. and Chin C. H., *Ann. Meeting of C. P. S.*, (1992).
15. Wei W. H. and Chin C. H., *N. S. C. Report*, (1991).
16. Milnor J.W., " *Topology from the Differentialiable Viewpoint* ", The Univ. Press of Virginia, pp. 16～19, (1965).

—本文作者任教於交大電物系—