傅利葉(Fourier) 分析淺介

李志豪

前　言

經過了十九、二十兩個世紀的發展，傅利葉分析變成相當博大精深的領域，傅利葉分析（或譯成富氏分析）佔了數學分析這個領域的大部分，在這篇短文，作者僅能介紹傅利葉分析的一小部分，希望具大二高等微積分程度有興趣的讀者讀後可以自己翻閱本文最後參考資料上所列的書。另一方面作者在此拋磚引玉。希望更多研究數學分析的學者能抽空寫寫介紹性之文章以嘉惠讀者。

早在1753年歐拉（Euler）在研究伯努利（Daniel Bernoulli）有關弦振動的問題就曾考慮將函數表示成三角級數的展開。我們用現行的符號說明一下。下列偏微分方程描述兩端點固定之弦振動：

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}\ , \\ u=u(x,t)\ ,\ 0\leq x\leq\pi\ ,\ t\in R \\ u(0,t)=0=u(\pi,t)\ ,\ c\ \text{為常數} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

利用分離變數法，我們可考慮將 u 寫成下列形式：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nct+d_n\sin nct)\sin nx。$$

u 必須滿足初期值條件，所以：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx=f(x)\ ,$$

$$u_t(x,0)=c\sum_{n=1}^{\infty}nd_n\sin nx=g(x)\ ,$$

所以這個偏微分方程的問題就轉化成將 f，g 表成三角級數展開的問題。

法國學者傅利葉（J. B. J. Fourier，1768～1830）開始用有系統的方法考慮將一個函數表成三角級數展開的問題。他曾受Benedictine教會的教育，曾有意當神父。不過後來他當數學教師。首先在地方上的軍事學校任教，後來到法國高等師範（École Normale），又到高等工藝學校（École Polytechnique）任教。在1798年他與蒙居（Monge）一起參加拿破崙的埃及遠征，成為埃及學院的秘書，撰述有關埃及的著作。回到法國後，他也從事一些行政工作。但也有機會繼續他的學術研究。他今日享有盛名的著作是1822年的「熱的解析理論」（Théorie analytique de la chaleur）。這本書被卡爾文（Kelvin）稱之為「偉大的數學詩編」，是十年前的一篇論文的整理。那篇有關熱的數學理論的論文得了一個學術獎。論文的評審者是

三L，即Lagrange，Laplace，Legendre，批評論文缺少嚴格的證明。後期的數學家開始努力從事這方面的嚴格證明工作。這就是十九世紀被稱為數學分析有嚴格證明的時代。

§1 傅利葉(Fourier)級數淺介

為了方便起見，我們考慮 $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$ 以取代 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$（因為 $e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$）。假設 f 為週期 2π 的函數，可表成 $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$ 而且此級數在〔$0, 2\pi$〕區間上為均勻收斂。

(1.1) $f(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$。

兩邊乘 $e^{-iN\theta}$，我們有

(1.2) $f(\theta)\, e^{-iN\theta}=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{i(n-N)\theta}$

(1.2)式在〔$0, 2\pi$〕上積分得

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-iN\theta}\, d\theta$$

$$=2\pi A_N \text{（因為} \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta=0,\ n\neq 0\text{）。}$$

(1.3) i.e. $A_N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$。

反之，令

$$S_N(\theta)=\sum_{-N}^{N} A_n e^{in\theta}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(\theta-t)}\, dt\text{。}$$

很自然的問題是：在什麼條件下 $S_N(\theta)$ 收斂到 $f(\theta)$。

令 $D_N(\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{in\theta}$ 這又叫 Dirichlet Kernel。$S_N(\theta)$ 可以寫成

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, D_N(\theta-t)\, dt\text{。}$$

如果我們定義

$$f*g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt,$$

則 $S_N(\theta)=f*D_N(\theta)$，

下列式子不難導出

(1.4) (i) $D_N(-\theta)=D_N(\theta)$，

（即 D_N 為偶函數）

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)\, d\theta=1$

(iii) $D_N(\theta)=\dfrac{\sin(N\theta+\theta/2)}{2\pi\sin\theta/2}$

（由數學歸納法可證得）。

我們先證下列引理：

(1.5) **黎曼-勒貝斯克（Riemann-Lebesque）引理**：如果 f 在區間〔a, b〕上一次微分為連續函數。，則

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^b f(\theta)\sin(A\theta)\, d\theta=0$$

證明：利用分部積分法（integration by parts）

$$\int_a^b f(\theta)\sin(A\theta)\, d\theta$$

$$=-\int_a^b \frac{f(\theta)}{A}\, d\cos(A\theta)$$

$$=\frac{-f(\theta)}{A}\cos A\theta\Big|_a^b+\frac{1}{A}\int_a^b \cos(A\theta)f'(\theta)\, d\theta$$

$\to 0$ 當 $A\to\infty$。

註：若 f 為各部分區間內可微分，此引理也成立。

我們可以得到下列定理。

(1.6) **定理**：假設 f 為實數軸上週期 2π 之函數，f 之一次微分為連續，

$$A_N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

$$S_N(\theta)=\sum_{-N}^{N} A_n e^{in\theta}\ ,$$

則 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(\theta)=f(\theta)$ 。

註：假設條件可放寬爲 f 在各部分區間內一次微分連續。

證明：

$S_N(\theta)-f(\theta)$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)D_N(t)\,dt-\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(\theta)dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta-t)-f(\theta))\,D_N(t)\,dt$$

$$=\int_{|t|<\delta} (f(\theta-t)-f(\theta))D_N(t)dt$$

$$+\int_{|t|\geq\delta} (f(\theta-t)-f(\theta))\,D_N(t)dt$$

$$\equiv I_1(\delta,N)+I_2(\delta,N)$$

當 t 小時，$|D_N(t)|\leq\dfrac{1}{2\pi|\sin t/2|}\approx\dfrac{1}{\pi\,|t|}$（因爲當 t 小時 $\sin t\approx t$），我們無法控制此項爲有限。幸好，由假設及中間值定理可得 $|f(t-\theta)-f(\theta))\leq M|t|$，所以可以控制 I_1 爲很小，至於 I_2 項，可利用引理 (1.5)（即黎曼－勒貝斯克引理）而估計爲很小。所以當 N 很大時，$S_N(\theta)-f(\theta)\to 0$。在此我們可更仔細看出，此收斂對 θ 是均匀的。

我們可用定理 (1.6) 證出下面的定理。

(1.7) Weierstrass 定理：令 f 爲週期 2π 之連續函數，給定任意小的正數 ε，存在一個三角多項式 $T(\theta)=\sum_{-N}^{N} b_n e^{in\theta}$，使得對所有 $\theta\in[0,2\pi]$，$|f(\theta)-T(\theta)|<\varepsilon$ 。

證明：（這裏的推論相當高等微積分程度）。由假設知，f 在 $[0,2\pi]$ 區間上連續，而 $[0,2\pi]$ 爲緊緻集，所以 f 爲「均匀」連續，那就是說，給定任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|x-y|<\delta$ 則 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$。將 $[0,2\pi]$ 分成數段

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots x_j<\cdots x_m=2\pi$$

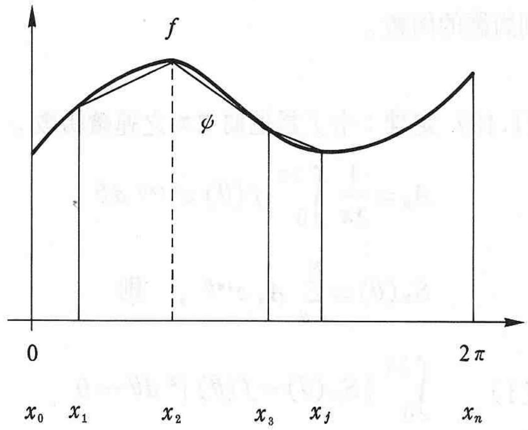
使得

$$|x_j-x_{j+1}|<\delta\ ,\ j=0,1,2,\cdots m-1。$$

定義一函數 φ 爲

$$\varphi(x_j)=f(x_j)\ ,\ j=0,1,2,\cdots m-1。$$

當 $x=tx_j+(1-t)x_{j+1}$，$0\leq t\leq 1$，則令 $\varphi(x)=t\,f(x_j)+(1-t)\,f(x_{j+1})$ 。如下圖所示：



我們可估計在 $[0,2\pi]$ 上

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon/2\ ,$$

當 $x\in[x_j,x_{j+1}]$，

$$f(x)-\varphi(x)$$
$$=t(f(x)-f(x_j))+(1-t)(f(x)-f(x_{j+1}))$$

(1.8)

$$|f(x)-\varphi(x)|$$
$$\leq t\,|f(x)-f(x_j)|+(1-t)\,|f(x)-f(x_{j+1})|$$
$$\leq t(\varepsilon/2)+(1-t)\,\varepsilon/2=\varepsilon/2$$

由定理 (1.6)，存在 $S_N(x)=\sum_{-N}^{N} b_n e^{inx}$，使得

(1.9) $|\varphi(x)-S_N(x)|<\varepsilon/2$，$x\in[0,2\pi]$

所以對所有 $x\in[0,2\pi]$

$$|f(x)-S_N(x)|$$
$$=|f(x)-\varphi(x)+\varphi(x)-S_N(x)|$$

$\leq |f(x)-\phi(x)|+|\phi(x)-S_N(x)|$
由(1.8)及(1.9)式

$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$。

一般而言，如果f僅是連續週期函數，則其傅利葉級數$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$ 不一定收斂，當f條件放寬，研究傅利葉級數之收斂性（Summability of Fourier Series）是一個相當專門的課題。

下面一個定理說明，傅利葉級數可以在平方積分的意義下（in the L^2 — sense）收斂到對應的函數。

(1.10) **定理**：令f爲週期2π之連續函數，

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta,$$

$$S_N(\theta)=\sum_{-N}^{N} A_n e^{in\theta}, \quad \text{則}$$

(i) $$\int_0^{2\pi} |S_N(\theta)-f(\theta)|^2\, d\theta \to 0$$

當$N\to\infty$，

(ii) 進而言之，如果

$$t_N(\theta)=\sum_{-N}^{N} b_n e^{in\theta}$$

b_n爲任意係數，則

$$\int_0^{2\pi} |t_N(\theta)-f(\theta)|^2\, d\theta$$

$$>\int_0^{2\pi} |S_N(\theta)-f(\theta)|^2\, d\theta,$$

除非 $b_n=a_n$，$-N\leq n\leq N$。

(iii) Parseval 不等式成立，

即 $$2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|A_n|^2=\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2。$$

證明：略，可在Seeley的書〔4〕找到。

說明：兩個連續函數f,g之「內積」可定爲

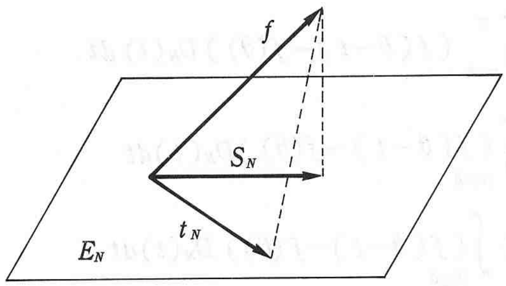
$$<f,g>=\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\, d\theta,$$

$$<e^{in\theta},\ e^{im\theta}>=\begin{cases} 2\pi & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

將$\left\{\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n=-N}^{N}$ 所展出之「空間」記爲E_N，f這個「向量」在E_N之「投影」爲

$$\sum_{-N}^{N}<f,\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}>\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}=\sum_{-N}^{N} A_n e^{in\theta},$$

(ii)之結果可由下列想像的幾何圖示說明。



§2 傅利葉變換(Fourier Transform)

我們先介紹一些預備定義、定理。

(2.1) **定義**：令f爲兩個變數之連續函數，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$在區間$y\in〔b,c〕$均勻收斂之意思是指，給定$\varepsilon>0$，存在$M$，$N$（只與$\varepsilon$有關），使得

$$\left|\int_B^A f(x,y)\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon,$$

對所有$A>M$，$B<N$，$b\leq y\leq c$皆成立。

註：黎曼積分皆定義在有界之區間上，所以瑕積分（Improper integral）$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$要定成 $\lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ B\to-\infty}}\int_B^A g(x)\,dx$，當然如果我們使

用勒貝斯克（Lebesque）積分，就可直接定在無限之區間上。

(2.2) 富比尼定理（Fubini's Theorem）：如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dx$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dy$ 分別在 y，x 所在之任意有限區間皆爲均勻收斂，而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dx\right]dy,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dy\right]dx$$

兩者中有一個收斂，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\;dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\;dy\right]dx$$

（即積分次序可互換）。

證明：略，詳 Seeley 的書〔4〕。

註：在此，如果我們使用 Lebesque 積分，則條件就可更少了。

(2.3) 定義：如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 收斂，則我們可定義函數 f 之傅利葉變換（Fourier Transform）$\hat{f}$ 如下：

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\;f(x)\,dx$$

註：經過適度之解釋，我們也可定理在 R^n 上函數之傅利葉變換，甚至更抽象之空間。

(2.4) 定義：如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(\xi)|\,d\xi$ 收斂，我們可以定義函數 g 之傅利葉逆變換（inverse Fourier Transform）$\check{g}$ 如下：

$$\check{g}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}\quad g(\xi)\,d\xi\text{。}$$

(2.5) 例子：令 $f(x)=e^{-x^2/2}$，則

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;f(\xi)\text{。}$$

證明：由微積分知 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\;dx=\sqrt{2\pi}$。

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\;e^{-x^2/2}\;dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+i\xi)^2/2}\;e^{-\xi^2/2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,e^{-\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+i\xi)^2/2}\,dx$$

（利用複變的定理）

$$=\frac{1}{2\pi}\;e^{-\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\;dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\xi^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\xi)\text{。}$$

爲了便於做傅利葉變換，我們介紹舒瓦茲（Schwartz）函數。

(2.6) 定義：f 稱爲舒瓦茲函數，如果 $f\in\mathscr{S}(R)=\{f\in C^{\infty}(R)$：對任何非負整數 α，β，存在 $N_{\alpha,\beta}>0$，使得對所有 x，$|x^{\alpha}f^{(\beta)}(x)|\leq N_{\alpha,\beta}\}$。由定義，我們很容易可推出 $f\in\mathscr{S}(R)$ 若且唯若 $f\in C^{\infty}(R)$（即 f 爲無限次可微），且對任意非負函數 α，β $\lim\limits_{|x|\to\infty}x^{\alpha}f^{(\beta)}(x)=0$。（在此 $f^{(0)}$ 表示 f 本身，β 爲正整數時，$f^{(\beta)}$ 爲 f 之 β 次微分。）由定義也可推出，如果 $f\in\mathscr{S}(R)$，則 $f^{(K)}\in\mathscr{S}(R)$，$x^m f\in\mathscr{S}(R)$。令 $g(x)=f(-x)$，則 $g\in\mathscr{S}(R)$。

(2.7) 定理：假設 f，g 皆爲舒瓦茲函數，則下列各式成立：

(i) $\widehat{f^{(K)}}(\xi)=(i\xi)^K\hat{f}(\xi)$；

(ii) $(\frac{d}{d\xi})^m\hat{f}(\xi)=[(-ix)^m f(x)]\hat{}\,(\xi)$。

(iii) $(f*g)\hat{}\,(\xi)=2\pi\,\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$，
$(f\cdot g)\hat{}=\hat{f}*\hat{g}$。

在此 $f*g(x)$ 定義成 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$。

(iv) $(\tau_x f)^{\wedge}(\xi)=e^{-ix\xi}\hat{f}(\xi)$，$\tau_x f$ 函數。定義成 $\tau_x f(y)=f(y-x)$（即 $\tau_x f$ 爲 f 之「平移」而已）。

(v) $(e_x f)^{\wedge}=\tau_x \hat{f}$，在此 $e_x(\xi)$ 爲 $e^{ix\xi}$。

(vi)如果 $\varepsilon>0$，如果 $h(x)=f(\varepsilon x)$，則

$$\hat{h}(\xi)=\varepsilon^{-1}\hat{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);$$

(vii) $\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}g=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}f$。

註：只要 $\int_{-\infty}^{\infty}|f|$，$\int_{-\infty}^{\infty}|g|$ 收斂，(iv)，(v)，(vi)，(vii) 式也成立。

證明：在此我們僅證 (iii)，(vii)

(iii) $(f*g)^{\wedge}(\xi)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi x}\left(\int f(t)g(x-t)dt\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\left(\int e^{-i\xi t}f(t)e^{-i\xi(x-t)}g(x-t)dt\right)dx$$

（由2.2富比尼定理，交換積分次序）

$$=\int\left(\int\frac{1}{2\pi}e^{-i\xi t}f(t)e^{-i\xi(x-t)}g(x-t)dx\right)dt$$

$$=\int e^{-i\xi t}f(t)\hat{g}(\xi)dt$$

$$=\hat{g}(\xi)\int e^{-i\xi t}f(t)dt$$

$$=\hat{g}(\xi)\left(2\pi\hat{f}(\xi)\right)$$

$$=2\pi\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

(vii) $\int\hat{f}g$

$$=\int\left(\left[\int\frac{1}{2\pi}e^{-i\xi x}f(x)dx\right]g(\xi)\right)d\xi$$

（由2.2富比尼定理，交換積分次序）

$$=\int\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi x}f(x)g(\xi)d\xi\right)dx$$

$$=\int f(x)\hat{g}(x)dx。$$

(2.8) 傅利葉之可逆公式：如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|f|$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}|$ 收斂，則

$$f(x)=2\pi(\hat{f})^{\vee}=\int e^{ix\xi}f(\xi)d\xi。$$

證明：第一步：我們先證明在 $x=0$ 時，這個特例定理成立，即要證 $f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)d\xi$。

令 $g(x)=e^{-\varepsilon^2x^2/2}$，則

由定理 (2.6) 之 (vii) 可得

$$\int\hat{f}(t)g(t)dt=\int\hat{g}(x)f(x)dx,$$

$$\hat{g}(x)=\frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\varepsilon^2}。$$

如下列式子，

$$(2.9)\int\hat{f}(t)e^{-\varepsilon^2t^2/2}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)\varepsilon^{-1}e^{-x^2/2\varepsilon^2}dx$$

這裡我們注意到，對所有 $\varepsilon>0$

$$\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon^{-1}e^{-x^2/2\varepsilon^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}dx=1$$

及對所有 $\delta>0$，當 ε 趨近零，

$$\int_{|x|\ge\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon^{-1}e^{-x^2/2\varepsilon^2}dx$$

也趨近零。（$\frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\varepsilon^2}$ 這群函數之「極限」，不是普通函數，是廸拉克函數（Dirac-function）。用「廣義」函數的語言，我們可說 $\frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\varepsilon^2}\to\delta$，而 δ 爲Dirac 函數，考慮 δ 在每一點之值無意義，必須考慮 $\delta(\varphi)=<\delta,\varphi>=\varphi(0)$，即 δ 是在舒瓦茲這種「好」函數上取值。）所以當 $\varepsilon\to0$，(2.9)式

之右式趨近 $f(0)$，至於左式，因為

$$|\hat{f}(t)\,e^{-\varepsilon^2 t^2/2}|\le|\hat{f}(t)|\,,$$

而對 t 固定，

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\hat{f}(t)\,e^{-\varepsilon^2 t^2/2}=\hat{f}(t)\,,$$

利用勒貝斯克（Lebesque）優勢控制收斂定理（Dominated Convergence Theorm）或仔細運用黎曼瑕積分之定義，得左式趨近 $\int\hat{f}(t)\,dt$。所以

$$f(0)=\int\hat{f}(\xi)\,d\xi\text{。}$$

第二步：令 $g(x)=\tau_{-y}f(x)=f(x+y)$，$\hat{g}(\xi)=e^{iy\xi}\hat{f}(\xi)$，這裡 y 為任意。由第一步，

$$g(0)=\int\hat{g}(\xi)\,d\xi\text{，但 } g(0)=f(y)\text{，}$$

所以 $f(y)=\int e^{iy\xi}f(\xi)\,d\xi$，得證。

(2.10) **定理**：假設 f, g 為舒瓦茲函數（Schwartz functions），即 $f,g\in\mathscr{S}(R)$，則下列成立。

(i) $f\in\mathscr{S}(R)$；

(ii) $2\pi(\hat{f})^{\vee}=f$，$2\pi(\check{f})^{\wedge}=f$；

(iii) 存在 $g\in\mathscr{S}$，使 $\hat{g}=f$；

(iv) $\langle f,g\rangle=2\pi\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$，這裡

$$\langle f,g\rangle\equiv\int f\bar{g}\text{。}$$

註：即把 $\wedge$ 看成 $\mathscr{S}(R)$ 到 $\mathscr{S}(R)$ 之映射，則 $\wedge$ 為一對一且映成，而且保持內積（不計較 2π 這個常數）。

證明：(i) 由已知 $f\in\mathscr{S}$，所以不難推知 $f^{(k)}\in\mathscr{S}$，$x^m f\in\mathscr{S}$，由定理 (2.7)

$$\xi^\alpha\left(\frac{\partial d}{d\xi}\right)^\beta\hat{f}(\xi)=\left([(-ix)^\beta f]^{(\alpha)}\right)^{\wedge}(\xi)$$

$$g=\left((-ix)^\beta f\right)^{(\alpha)}\in\mathscr{S}\text{，}$$

$$\therefore\quad\left|\xi^\alpha\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{(\beta)}\hat{f}(\xi)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi}g(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int|g|<\infty.$$

所以 $\hat{f}\in\mathscr{S}$。

(ii) 因為 $f\in\mathscr{S}$, $\hat{f}\in\mathscr{S}$, 所以 $\int|f|<\infty$ 而且 $\int|\hat{f}|<\infty$，由定理 (2.8) $(\hat{f})^{\vee}=f$。

同理 $2\pi(\check{f})^{\wedge}=f$。

(iii) 令 $g=2\pi\check{f}$，$g\in\mathscr{S}$，由 (ii) $\hat{g}=f$。

(iv)

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$=\int\left(\int e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi\right)\overline{g(x)}\,dx$$

由富比尼定理，交換積分次序

$$=2\pi\int\hat{f}(\xi)\,\overline{\left(\int\frac{1}{2\pi}e^{-ix\xi}g(x)\,dx\right)}d\xi$$

$$=2\pi\int\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}=2\pi\langle\hat{f},\hat{g}\rangle\text{。}$$

下面為一些傅利葉變換（Fourier Transform）之應用。

(2.11) **定理**：如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx<\infty$，$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\xi)|\,d\xi<\infty$，我們可以解下列拉普拉斯（Laplace）方程：

$$(2.12)\begin{cases}\Delta u(x,y)=u_{xx}+u_{yy}=0\,,\\ \quad-\infty<x<\infty\,,\ y>0\,,\\ u(x,y)\to g(x)\,,\ \text{當 } y\to 0\text{。}\end{cases}$$

證明：我們先假設方程式有解 $u(x,y)$，來猜測 u 之式子。我們先進行一些「形式」上的運算，對 x 變數做傅利葉變換，我們得

$$(2.13)\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2\hat{u}(\xi,y)+(i\xi)^2\hat{u}(\xi,y)=0\\ \hat{u}(\xi,y)\to\hat{g}(\xi)\,,\ \text{當 } y\to 0\text{。}\end{cases}$$

(2.13) 是以 ξ 為參數之常微分方程，$\hat{u}(\xi,y)$

的一般解爲 $\alpha e^{-\xi y}+\beta e^{\xi y}$ ，我們取

$$\hat{u}(\xi,y)=\begin{cases}\alpha e^{-\xi y} & \xi>0\\ \alpha e^{\xi y} & \xi<0\ ,\end{cases}$$

以避免 u 爲指數型的增加。我們取

$$\hat{u}(\xi,y)=\alpha(\xi)\,e^{-|\xi|y},$$

因爲 $y\to 0$ ，

$$\hat{u}(\xi,y)\to\hat{g}(\xi)\ ,\ \alpha(\xi)=\hat{g}(\xi)。$$

所以方程式 (2.12)「候選」的解如下：

(2.14) $u(x,y)=2\pi(\hat{u}(\xi,y))^{\wedge}$

$$=\int e^{ix\xi}(e^{-|\xi|y}\hat{g}(\xi))\,d\xi\ 。$$

從現在起，我們可做比較嚴格的推論。由 (2.14) 可知 $u(x,y)\in C^{\infty}$，在 $-\infty<x<\infty$ ，$y>0$ 。(這裡會遇到微分運算與積分運算何時可互換之問題，用上大二高等微積分之知識。)

$$\Delta u(x,y)$$

$$=\int\Delta(e^{ix\xi}\,e^{-|\xi|y})\,\hat{g}(\xi)\,d\xi$$

$$=\int[(i\xi)^2+|\xi|^2]\,e^{ix\xi-|\xi|y}\,\hat{g}(\xi)\,d\xi$$

$$=0$$

在此，我們主要利用下述事實：$e^{-|\xi|y}$ 在 $y>0$ 時爲「好」的函數。再利用優勢控制收斂定理 (Dominated Convergence Theorem)，當 $y\to 0$ ，

$$u(x,y)\to\int e^{ix\xi}\,\hat{g}(\xi)\,d\xi=g(x)\ 。$$

所以 $u(x,y)$ 爲 (2.12) 之解。

(2.15) **定理：(簡單的雙曲型偏微分方程)**。如果 $g\in\mathscr{S}(R)$ ，$b,c\in R$ ，$b^2-c>0$ ，則下列方程有解：

(2.16)

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+2b\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+c\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]u(x,t)=0\\ u(x,0)=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\end{cases}$$

證明：我們首先假設方程式 (2.16) 有解以便猜測 u 的式子。$u(x,t)$ 對 x 變數做傅利葉變換，得

(2.17)

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+2b(i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)+c(i\xi)^2\right]\hat{u}(\xi,t)=0\\ \hat{u}(\xi,0)=0\\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,0)=\hat{g}(\xi)\ 。\end{cases}$$

(2.17) 爲帶參數 ξ 之常微分方程。其一般解爲

$$\hat{u}(\xi,t)=\alpha e^{i\lambda_1\xi t}+\beta e^{i\lambda_2\xi t}\ ,$$

其中 λ_1, λ_2 爲下列代數方程式之根：

$$\lambda^2+2b\lambda+c=0$$

爲了滿足初期值條件我們有

$$\begin{cases}\hat{u}(\xi,0)=\alpha+\beta=0\\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,0)=(i\lambda_1\xi)\alpha+(i\lambda_2\xi)\beta=\hat{g}(\xi)\end{cases}$$

所以

$$\alpha=\frac{g(\xi)}{i\xi(\lambda_1-\lambda_2)}\ ,\ \beta=\frac{g(\xi)}{i\xi(\lambda_2-\lambda_1)}\ 。$$

$$\hat{u}(\xi,t)=\left(\frac{e^{i\lambda_1\xi t}-e^{i\lambda_2\xi t}}{i\xi(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\hat{g}(\xi)。$$

所以我們可「猜測」(2.16) 的解爲

$$u(x,t)=2\pi(\hat{u}(\xi,t))^{\vee}$$

$$=\int e^{ix\xi}\left(\frac{e^{i\lambda_1\xi t}-e^{i\lambda_2\xi t}}{i\xi(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\hat{g}(\xi)\,d\xi$$

不難驗證 u 確實爲方程式 (2.16) 之解。

§ 3 進一步之應用

利用定理 (2.7)，我們知道經過傅利葉變換，「微分」的作用相當乘以「一次多項式 $i\xi$」。所以令 P 爲一常係數微分算子

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha ,$$

$$(P(f))^\wedge = P(i\xi)\,\hat{f}(\xi) ,$$

所以經過傅利葉變換，P的作用相當乘以一個多項式。在常係數偏微分方程，也有類似的性質，所以傅利葉分析在解常係數微分方程是一個相當有力之工具。另外傅利葉變換也可用在Convolution型的積分算子，例如

$$Tf(x)=\int K(x-y)\,f(y)\,dy ,$$

則 $(Tf)^\wedge(\xi)=2\pi\,\hat{K}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$，

經由變換，「T」之作用相當乘以一個函數「$\hat{K}(\xi)$」，這有助於問題之簡化與分析。更重要的積分算子是奇積分算子（Singular Integral Operators），典型的例子如下列希爾伯變換（Hilbert Transform）

$$Hf(x)=\text{p.v.}\ \frac{1}{\pi i}\int \frac{f(y)}{y-x}\,dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{y-x}\,dy$$

這裡因爲 $\frac{1}{y-x}$ 在 $y=x$ 有奇點，所以積分的的解釋要注意。

$$(Hf)^\wedge(\xi)=sign(\xi)\,\hat{f}(\xi) ,$$ 其中

$$sign(\xi)=\begin{cases}1 & \xi>0\\ -1 & \xi<0\end{cases}$$ 。

所以經過了傅利葉變換，希爾伯變換相當乘以一個「$sign(\xi)$」的函數。

傅利葉分析的發展也超越對 R^n 之分析而考慮一些「抽象群」上的傅利葉分析。所以現在的一般數學家稱歐氏空間 R^n 上的傅利葉分析爲古典傅利葉分析（Classical Fourier Analysis）（這裡「古典」不能望文生義，解釋成「過時」，這個領域現在仍然非常活躍。）對一般抽象群或Banach 代數的傅利葉分析叫抽象調和分析（Abstract Harmonic Analysis）。

具有大二高等微積分程度的讀者，對此領域有興趣，可先看Seeley 的書〔4〕，再看Dym & McKean的書〔2〕。

參考資料

〔1〕Richard Beals, Advanced Mathematical Analysis, Springer-Verlag 1980.

〔2〕H. Dym, H. P. McKean, Fourier Series and Integrals, Academia Press, 1972.

〔3〕L. Gårding, Encounter with Mathematics, Springer, 1977.

〔4〕R. T., Seeley, An Introduction to Fourier Series and Integrals, W. A. Benjamin, INC., 1966.

——本文作者任職於中央研究院數學所——