泰勒展式——

分析學的"HEART"所在

田光復

記得當年大一時曾經問過一位老師什麼叫分析學，老師想了一下又一下；覺得我們不可能眞懂吧，他說 $\varepsilon-\delta$ 就是分析學。那時對 $\varepsilon-\delta$ 還是滿頭霧水的時代，聽完之後頗有幾分恐懼感。不錯，分析的書本、論文裡頭滿是 $\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$，這種東西，我們勿寧說它們是分析學的法寶、法術、咒語，但千萬不可說它們就是分析學的一切。它們是分析學中的法器，可以捕捉獵物，使獵物無從脫逃，但是頗少掉我們之所以行走世間的良心靈魂，以及善的澄澈。我個人倒認爲泰勒展式(Taylor expansion)才是分析學中，最能表達單純性的善的直覺的美。

積分的概念始於求圓的面積，衍而求拋物線下的面積，再衍而求一般函數圖形下的面積，所憑藉的就是漸近法、近似法，也就是黎曼和(Riemann Sum)；每一更細的分割的黎曼和就是更接近曲線底下的面積。泰勒展式亦是如此，首先我們可以說它是對任意一函數(心裡想的就是 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，e^x，$\ln x$，$\sqrt{x}$，$e^{\sqrt{x}}$ $e^{\sin x}$，等等。這一類的東西)的形式漸近；亦即對上述這類的函數，現通稱爲某 $f(x)$，$f(x)$ 必可近似的表爲多項式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$。$a_0+a_1x$ 這是一次式，是比較差的近似。$a_0+a_1x+a_2x^2$ 這是二次式，是稍好些的近似式，再推廣到 $a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$，$n$ 次式，n 愈大則近似得愈好。泰勒說，對任一 $f(x)$ 我們都可以用"這種"多項式來近似於它，而那種多項式後來就稱爲泰勒多項式。因爲 x 可以變動，而多項式的形不變，故我們稱此多項式爲函數 $f(x)$ 的形的逼近；而形的逼近因含所有 x 的

可能變化，故某一 $x=x_0$ 固定時，自然 $f(x_0)$ 也該用 $a_0+a_1x_0+\cdots\cdots+a_nx_0^n$ 逼近了。

也許諸位要說，以上所說的近似情況毛病很多，例如 f 若只為 k 次可微分，則泰勒展式自然受阻而不能一直展下去；又如 $\ln x$ 在 0 處不可展，等等。又有時展開的冪級數收斂有限制，甚至展式之多項式部分無效，只有剩餘項有效，這些種種我們可說它們僅僅是泰勒展式的家務事而已。當然，展式並非全能，有些是要給限制條件的，但這些都是「壞的」方面的管束！善的方面則是說「我們可以有一形的近似」，這是創造方面的發揚性的善舉，我想數學是該造出有的，而不是把不該有的情況論證出來就是數學工作的價值。但這些都還是防衛性的言詞尚不足以說出泰勒展式之所以為分析學和heart之緣故。我們的理由是這樣：

我們知道對兩變數函數如 $\sin(xy^2)$，或 $\sin(x+y)+\ln(1+x^2+y^2)$ 等等，可簡稱為 $f(x,y)$，這類函數可簡單地利用單變數的泰勒展式代入得出，新展式是一股腦將 (x,y) 代入單變數所在而得，例如由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$，可得 $\sin(xy^2)=(xy^2)-\frac{(xy^2)^3}{3!}+\frac{(xy^2)^5}{5!}-\cdots\cdots$，由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$，可得 $\ln(1+x^2+y^2)=(x^2+y^2)-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}+\frac{(x^2+y^2)^3}{3}-\cdots\cdots$，再把 $(x^2+y^2)^2$ 展開，整理成 x^iy^j 各項的和即成二變數函數之泰勒展式！總之任一 $f(x,y)$ 必可表為 $\sum\limits_{\substack{i=0\\j=0}}^{\infty}a_{ij}x^iy^j$。當我們把 $f(x,y)$ 用這些多項式表完之後又如何了呢?!它可以應付一切的近似表現！如果我們要去求 $f(x,y)$ 之二重積分，如 $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$，首先我們可以利用泰勒展式逐項去積分，積分再相加，但它每一項之積分是 $\int_0^1\int_0^1 a_{ij}x^iy^jdxdy=a_{ij}\int_0^1\int_0^1 x^iy^jdxdy$；也就是說只要積分 $\int_0^1\int_0^1 x^iy^j\,dxdy$ 就好，但這時這積分「正好」是 $(\int_0^1 x^i dx)*(\int_0^1 y^j dy)$，是將兩變數分離，分開積分相乘而得！故原來的 $\sum a_{ij}x^iy^j$ 積分的結果，形沒變還是 $\sum a_{ij}(\int_0^1 x^idx)*(\int_0^1 y^jdy)$ 還是相乘再加起來。泰勒展式就是這樣的，把一切函數視為各變數各自冪次，之後，再乘起來，再按冪次每項相加。這獨立相乘是很單純的想法！而縱使像 x^y 或 $(x^2+y^2)^{xy}$，其 x,y 搞在一起。連着的，很難的樣子，它們還是可以展開成多項式的樣子，而它們的二重積分，卻還是保留着同一形式，相乘再相加的單純性，即是兩個變數各自獨立做積分，再乘起來，再乘係數再一項項相加，一切變成簡單的算術觀念。

註：Brook Taylor（1685～1731）也是一個英國之寫實派畫家，他有幾幅畫為大英博物館收藏，可想見的，他的畫與他的數學有某種關連性，一般說來用切線叢，可以素描一個人的頭顱、身體、鼻子，若要寫實些，需要很密的切線叢，而且要移動位置，若改以拋物線做局部近似，就更加神似。如果用高次多項式近似式則更好，甚至可以不用移動着筆之位置，從一定點就可展開出相當神似於原貌的圖畫。Thomas Simpson（1701～1761，英國人）承續了二次拋物線展開而求出到現在還甚有效的積分求值法。

（本文作者任教於台大數學系）