丘成桐先生演講——

Laplacian 算子對應譜的最近發展

時間：80年11月4日
地點：中正大學應數所

賴玲淑、劉榮彰 記錄

此篇文章主要是探討譜與區域的對應關係。首先介紹何謂 Laplacian 算子，所謂 Laplacian 算子在一維空間是定義為 $\frac{d^2}{dt^2}$，而在二維空間則定義為 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，記做

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ 。$$

一開始，先看簡單的一維空間，通常在一維空間的 Laplacian 算子的譜的問題可由弦振動來解釋之，即固定兩端點不動的均勻弦（密度 $\rho=1$）。存在一組數列 $\{\lambda_i\}$，$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2<\cdots\cdots<\lambda_n<\cdots\cdots\to\infty$，而由此

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_i}{dt^2}+\lambda_i u_i=0\\ u_i(1)=u_i(0)=0\end{cases}$$ 方程式，每任意特徵值 λ_i 可對應一個特徵函數（基本波）u_i，再將 u_i 正規化，即 $\int_0^1 u_i^2=1$，$\forall i$。則對任意在〔0，1〕之間的函數（波）u，可用此基本波 $\{u_i\}$ 表示之。亦即

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}a_i u_i,\ u(0)=u(1)=0\ 。$$

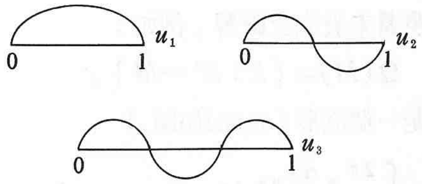
若此弦的密度 ρ 不均勻，那上述的方程要修正為

$$\frac{d^2u_i}{dt^2}+\lambda_i\rho u_i=0$$

而在研究一維弦振動中有一重要性質，就是 Sturm-Liouville 性質：

$$\#\{x\in(0,1)\,;\,u_i(x)=0\}=n-1,$$

當 $\quad u_i(0)=u_i(1)=0,\ \forall i$



但此性質在二維空間以上就不存在了，所以在研究二維空間的問題比較困難，跟一維空間不同。

綜合上述，給定弦本身的密度 ρ，可以決定一組譜 $\{\lambda_i\}$，$i=1,2,\cdots\cdots$（其實 $\sqrt{\lambda_i}$ 就是頻率）。反過來說，就是著名的 inverse 問題，即若給定 $\{\lambda_i\}$，如何決定密度 ρ；相對的在二維空間也有 inverse 問題，即 Kac. Bochner 所提的問題：

How to hear the shape of a drum?

那就是說，鼓可視爲一個二維的有界區域（domain），所謂鼓的形狀，就是相對於區域的幾何性質，這個問題就是怎麼樣從打鼓的音調聽出鼓的形狀。同樣的問題在一維空間的問題比較簡單，因爲整個potential 可以寫下來，二維空間以上就比較麻煩，我們考慮的方程式爲

$$\begin{cases} \Delta u_i+\lambda_i u_i=0 \\ u_i|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

，其中$\Omega\subset \boldsymbol{CR}^2$，是一個有界區域。

而$u_i|_{\partial\Omega}=0$ 即對應於打鼓的時候，邊界不變。從此可提出許多問題，其中有個著名的問題：Ω的幾何性與譜$\{\lambda_i(\Omega)\}\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots\cdots\times\boldsymbol{R}$的對等性，其中已知$\Omega$可決定譜$\lambda_i$，而$\lambda_i$能否決定$\Omega$將是主要探討的問題，在物理上而言，即是古典力學與量子力學的對應關係，那就是說一個粒子在力場裡怎麼走，即彈來彈去的軌跡；古典力學討論其相對應的譜很小的時候，而量子力學即算子裡譜的問題，對應的譜很大的時候（$\lambda_i\to\infty$），而這只是一個特別情形，實際上，在物理學裡，一般情況都有potenial V（位能）存在，此時，$V:\Omega\to\boldsymbol{R}$，即考慮

$$(-\Delta+V)u_i+\lambda_i u_i=0 。$$

但此問題還未被完全瞭解，例如：

$$\Omega(M)=\{X:S'\to M\},$$

其中M是一個流形（manifold）

$$E=\int_0^{2\pi}\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2dt \quad (\text{energy}),$$

$$E:\Omega(M)\to\boldsymbol{R}$$

在此考慮$-\Delta+\alpha E$這算子，亦即

$$(-\Delta+\alpha E)u_i+\lambda_i u_i=0\ (\text{允許}\alpha\text{在變}),$$

而加入energy E，才會有好的譜分射。又一般在幾何上，都把V設定爲0，實際上，在微分幾何中並非不討論$V\neq0$的情況，這要謹記在心。

現在進入主要的問題：$\{\lambda_i\}$能否決定Ω的幾何性，對此問題可由二種不同的方法逼近，此二方法分別爲Wave mechanicial approach 和elliptic 問題。

(一)Wave mechanicial approach

基本上wave mechanicial approach 可用kernel mechanicial 來看，即考慮$\exp[it\sqrt{-\Delta}]$，其中Δ爲Laplacian 算子，從這邊其譜對應於$\exp[\sqrt{-1}\,t\sqrt{\lambda_i}]$，從此著手的好處是Wave equation（波動方程）可與古典力學聯結起來，因波動方程的傳播（propagation）速度是有限的（finite），亦即在解波動方程時，如果在$t=0$時有singularity，則在時間$t>0$時，singularity 仍存在，不會消失，這與連接算子的譜有很大關係，基本上研究的方法是考慮kernel function（核函數）

$$W(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{\sqrt{-1}\,t\sqrt{\lambda_i}}\,u_i(x)u_i(y)$$

的形式，這可解出wave equation，且滿足$\frac{\partial^2u}{\partial^2t}-\Delta u=0$。但實際上，$\sum_{i=1}^{\infty}e^{\sqrt{-1}\,t\sqrt{\lambda_i}}\,u_i(x)\cdot u_i(y)$並不收斂，因而可發現其singular support與λ_i有關，然後由剛才寫下來的$w(x,y)$跟用不同的方法如微分幾何或其他方程方法計算方程的approximate kernel，而後我們發現與geodesic flow（沿直線如何走的問題）有關，如此用這二種不同的方法得到的基本解，令它們相等，就可得到許多訊息（information）去探討Ω，在物理上稱爲WKB method，同樣的方式亦可應用elliptic 方法，在下節將再做詳細說明。

(二)elliptic問題：即Heat equation method

首先考慮$\exp(+t\Delta)$算子，並考慮

$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} u_i(x) u_i(y)$，我們可以證明在$t>0$時會收斂。定義$H(t,x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} u_i(x)\cdot u_i(y)$，$t>0$，可知$H$不但收斂而且是$C^{\infty}$函數，此時$H(t,x,y)$滿足

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}-\Delta H=0 \\ \lim\limits_{t\to 0} H(t,x,y)=\delta_x(y) \end{cases}$$

且 $$\int_M H(t,x,x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\int_M u_i^2(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\ ,\ t>0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

由此可知譜$\{\lambda_i\}$與函數$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}=:f(t)$是等價的，從這個等價的結果，我們就發現一個方法來研究$\{\lambda_i\}$與古典力學的一些關聯性，這二者的關係是什麼呢？就是說所謂Heat equation，(*)可以用不同的方法來解，亦即可以用approximate 方法來算，我們可以硬將其解寫下來。我們令

$$H_n(t,x,y)=C_n t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\ ,$$

$$C_n=\text{常數}$$

這就是在n維空間裡Heat equation的解（對應於所謂的Gaussian Distribution）。而現在我們在二維空間裡，熱方程式的解已經找到了！但我們需要加入一些邊界值的條件，（這有如我們固定一個區域，然後考慮熱從此區域流失的現象），亦即(*)變為

$$(**)\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}-\Delta H=0 \\ \lim\limits_{t\to 0} H(t,x,y)=\delta_x(y) \\ H(t,x,y)=0\ ,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

此時(**)的解就須加入一些項：

$a_0(x,y)+a_1(x,y)\sqrt{t}+a_2(x,y)t+\cdots\cdots$

亦即$H(t,x,y)=C_n t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\ (a_0(x,y)+a_1(x,y)\sqrt{t}+a_2(x,y)t+\cdots\cdots)$ 然後逐項的去解a_i，$i=0,1,2,\cdots\cdots,a_i$ 可以用區域的幾何（如邊界的長度，曲率以及其微分，……）來表示。其實這樣解出來的無窮級數並不收斂，但這沒有造成什麼問題，因為我們只考慮當t很小的時候（這對於λ_i 很大的時候）；我們得到

$$\int_M H(t,x,x)\,dx$$
$$=C_n t^{-\frac{n}{2}}\left(\int_M a_0(x,x)dx+\int_M a_1(x,x)dx\sqrt{t}\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

由①②，$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$

$$=C_n t^{-\frac{n}{2}}\left(\int_M a_0(x,x)\,dx\right.$$
$$\left.+\int_M a_1(x,x)\,dx\sqrt{t}+\cdots\cdots\right),\ t\to 0$$

我們可證明$a_0(x,x)=1$，所以得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}=C_n t^{-\frac{n}{2}}(\mathrm{Vol}\,(M)+O(\sqrt{t}\,)),\quad t\to 0$$

亦即給定一組$\{\lambda_i\}$，我們可決定出

$$\mathrm{Vol}\,(M)=\frac{1}{C_n}\lim_{t\to 0} t^{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$$

事實上，也可算出

$$\mathrm{Area}\,(\partial M)=\int_M a_1(x,x)\,dx$$

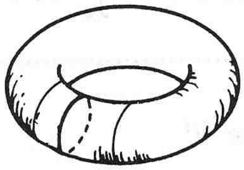
$$\int_M R=\int_M a_2(x,x)\,dx\ ,$$

其中R是曲率（curvature）。

以上的Heat equation method也是用二種不同的方法，得到$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$的基本解在$t\to 0$時，然後讓它們相等，得到一串訊息，如Vol$(M)$，Area$(\partial M)$，……，這是在eigenvalue（譜）中很重要的方法，可是此

方法還是不夠用的，因爲只看 $t\to 0$，就像在 WKB method 中也會遺失了一些訊息，因此，也無法從 wave mechanicial approach 和 elliptic 完全決定區域 Ω。

例：在 wave equation 時，考慮 wave kernel，其訊息基本上是沿著（travel along）characteristics 傳播，即所謂 null curve，在區域裡，相當於 geodesic，而從 geodesic 可以得到一串 eigenvalue $\{\lambda_i\}$，如何得到呢？我們在流形上說明比較容易。例如在 torus 上，有一個封閉的 geodesic，如下圖

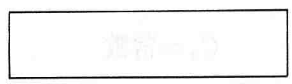


我們可以作一管狀鄰域（tubelar neighborhood）V，然後可以得到一組函數 ϕ_i；這些函數在 V 之外爲 0（零），然後在這些 geodesics 附近有值，事實上 closed geodesic 本身就有許多訊息，我們可定義 Pòincaré map（映射），從這個映射，我們可以建構一組近似的 eigenfunction ϕ_i 出來，即 $\|\phi_i\|_2=1$，$\|\Delta\phi_i-\lambda_i\phi_i\|_2<\varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_i\to 0$ as $i\to\infty$，ϕ_i 可以用 Pòincaré map 寫下來，而對於這些 eigenvalues 的行爲，我們知道的不多，但這一串的 eigenvalues 是無法從以上的方法（Heat equation）得到的。

例如：torus $T^2=\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$，其 metric 爲 dx^2+dy^2，曲率 $K=0$，而在 T^2 上，Heat equation 的近似解爲 $Ct^{-1}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$，as $t\to 0$。亦即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}\sim Ct^{-1}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$，as $t\to 0$，沒有了 lower terms，即只有 $a_0=1$，其它都爲 0，所以無法得到很好的訊息當 $t\to 0$。但從 wave equation 可以找到所有的 closed geodesic 的長度，叫做 $\{\ell_i\}$，而 $\{\ell_i\}$ 可由 $\{\lambda_i\}$ 決定，又在某些特別情形下，$\{\lambda_i\}$ 亦可由 $\{\ell_i\}$ 決定，至少在 tori 的情形可以決定 $\{\lambda_i\}$。如在 M^n（M 爲 n 維流形），$K=-1$ 時，我們可以證明 $\{\ell_i\}\Longleftrightarrow\{\lambda_i\}$，這即爲著名的 Selberg trace formula。

現在要講幾個做了很多年的問題，其中一個就是如何了解多少個 λ_i 即決定 Ω 的幾何性質的問題，譬如 $\{\lambda_i\}$ 可決定 Vol (M) 這個不變量，亦即從頻率決定了面積有多大（討論二維時），這就是前面所寫的公式：

$\lim\limits_{t\to 0}C_n t^{-\frac{n}{2}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}=\text{Vol}\,(M)$。底下我們想想看事實上能否眞正地決定面積的這個問題。考慮打一個鼓，是否可以聽出它的面積（Area）有多大？其實這是有點欺騙。因爲打鼓的時候，只能聽到有限（finite）的 λ_i，不可能將函數 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}$ 找出來。這邊一個問題就是這樣：Vol (M) 是否可以有效地決定（determine effectively）？就是能不能眞的從有限的 λ_i 有效決定 Vol (M) 的問題，這個問題是有可能沒辦法做到的。現在舉個最簡單的例子，就是考慮一個長方形區域（如下），慢慢拉



長的時候，此時長方形的譜從兩邊得到，一邊從 x 方面，另一邊從 y 方向，而 x 方向有 $\phi_i(x)$（eigenfunction），y 方向有 $\psi_j(y)$（eigenfunction），而 $\phi_i(x)$ 相對的固有値（eigenvalue）爲 λ_i，$\psi_j(y)$ 相對的固有值爲 $\widetilde{\lambda}_j$，所以整個長方形的譜爲 $\{\lambda_i+\widetilde{\lambda}_j\}$，那現在有什麼問題呢？就是若此長方形拉的很扁（窄），即固定寬度（y 方向），長度拉長（x 方向），此時 $\widetilde{\lambda}_j$ 這邊很大，λ_i 很小。而假如 $\widetilde{\lambda}_j$ 很大，就看不到 $\widetilde{\lambda}_j$，此時長方形的譜慢慢靠近 $\{\lambda_i\}$，就有限的步驟來看的時候，只看到 λ_i 的部分，看不到 $\widetilde{\lambda}_j$ 的部分（λ_i 與 $\widetilde{\lambda}_j$ 相較之下）

，所以從 λ_i 這邊去看的話，無從曉得面積到底有多大？（因只有長度無法決定面積）。所以必須改變這問題，了解有效決定的意思。而不能說：Given $\varepsilon>0$，determine Vol (M) up to ε 的問題為 $\exists n(\varepsilon)$，λ_i，……，λ_n s.t. $\{\lambda_1$，……，$\lambda_n\}$ determine Vol (M) up to ε。剛才的例子就說明了不可能做到。所以，我們要想個辦法知道它的意思，這個辦法就是給定 $\varepsilon>0$，已知 λ_1，存在 $n(\lambda_1,\varepsilon)>0$，使得 $\{\lambda_1$，……，$\lambda_n\}$ 決定的 Vol (M) 的誤差在 ε 之內。目前已知在 Ω 是凸區域（convex）時，能有效地決定 Vol (M)，即

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n(\lambda,\varepsilon)\ \text{s.t.}\ \{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}\ \text{determine vol}(\Omega)\ \text{up to}\ \varepsilon。$$

在此提出二個 open questions：

Question 1. Area $(\partial\Omega)$ 是否可被有限 λ_i 決定，當 Ω 是凸區域。亦即 Area $(\partial\Omega)$ 是否可用上述同樣的方法所決定？

Question 2. 若 Ω 不是凸區域（如 star-shape 星形區域）Vol (Ω) 是否也可被有限 λ_i 決定?

最後提出二個類似的結果，一個著名的定理是：

若 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}(\Omega)$

$=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n,\cdots\}(\text{Ball})$

則可推得 $\Omega=\text{Ball}$。

最近Melas得到下列有趣的定理：

Melas：若 $\lambda_i(\Omega)\sim\lambda_i(B)$，$1\leq i\leq n(\lambda_i)$，且 Ω 為 convex，則可得到 $\Omega\sim$ Ball，亦即存在半徑 r_1，$r_2>0$，使得 $B(r_1)\subset\Omega\subset B(r_2)$ 且 $r_2-r_1\sim 0$。

當把 Ω 為凸集的假設去掉，則Melas的結果能否成立呢？這是一個有趣的工作。