

八十學年度大學聯考

自然組數學試題簡評

石厚高

七月二日我拿到大專聯考自然組數學試題，我作了一遍，感受是數據太煩。七月十五日暑期輔導開始，我要兩班學生把它作一遍，其中30分他們沒有學過，所以考試時間就給他們60分鐘，比大專聯考80分鐘打七折要多了4分鐘。兩班105人平均是29.69，按百分比放大是42.41，這個成績對建中學生來說是太低了些。

填空第1題考了指數函數 e^{-x^2} ，看看學生會不會作它的微分，以及利用微分來求極值，這是多年來罕見現象，以往是出多項函數的微分或求極值，這個式子的微分大家都教過，全校統一命題的考試也出過，當時還有老師認為這題是不是超過範圍，其實“範圍”是很難加界定的，筆者自民國54年開始教高中三年級，就經常研究大專聯考數學試題，再挑重要的講給學生聽，因為我教的是景美女中與建中，都是要升學的，那時是高中不需要教微積分的歲月，我發現考題裡超過範圍的有：

1. 橢圓半長軸、半短軸之長各為 a ， b ，試求其面積。

2. 平面 E 與平面 F 所夾之二面角為 θ ，平面 E 上有區域面積為 a ，它在平面 F 上之射影面積為何？

3. 以往都教部分分式，現行的高中數學標準本是從73年開始起用的，刪去了部分分式，可是部分分式只有在積分時才有用，課本裡的積分用不到部分分式，可是大專聯考裡又考了

部分分式。

4. 對稱式與交錯式的分解因式早就刪去了，可是每若干年又會出上一次。

第1題的公式 πab 與第2題的公式 $a \cos \theta$ 課本都沒有。這些章節中學教師都會自動補充的，所以大專教師不熟悉中等教材，以致命題時超出範圍，並不會給中學教師帶來困擾。

填空第2題的構想不錯，融立體幾何與二元二次聯立方程式於一爐，高一、高二的學生都應該會作，應該是不難，可是作對只有三個學生，因為它的數據麻煩，所以命題人在設計試題時要多多測試數據。某次全校統一考試我曾設計了這麼一題：

平面： $x/1+y/2+z/8=1$ 截 x, y, z 軸於 A, B, C ，求

- (1) 原點 O 與平面 E 間之距離
- (2) 四面體 $OABC$ 的體積
- (3) ΔABC 的面積
- (4) 一球內切於四面體 $OABC$ 其半徑為
- (5) 一球過 O, A, B, C 四點，其半徑為

略解：

(1) 代公式得 $8/9$

(2) $1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8 = 8/3$

(3) 體積 $= (1/3) \Delta ABC \cdot 8/9 = 8/3$

$\therefore \Delta ABC = 9$

(4) 設此內切球之球心為 (a, a, a)

$\therefore a = 1/9 \cdot (8a + 4a + a - 8)$

故得 $a = 2$ ，半徑為2

(5)設外接圓之圓心為 $P(a, b, c)$ ，又
 $A(1, 0, 0)$ ， $B(0, 2, 0)$ ， $C(0, 0, 8)$

由 $PO=PA=PB=PC$

$$\begin{aligned} \text{得 } a^2 + b^2 + c^2 &= (a-1)^2 + b^2 + c^2 \\ &= a^2 + (b-2)^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + (c-8)^2 \end{aligned}$$

解得圓心 $P(1/2, 1, 4)$ 求出半徑為 $\sqrt{69}/2$

這一題平面 E 的 x, y, z 軸截距 $1, 2, 8$ 的設計，我試測了很多組，最後才作的決定，第(3)小題如果沒有想到由體積來求，而由三邊之長代海龍公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 就會很麻煩。第(5)題和填空第2題類似，不過第(5)題的數據單純多了，會列式子的很快就作出來了，而填空第2題很多學生式子列對答案仍然沒有作對。兩個月之後，又一次全校性的考試，命題人把(4)、(5)兩題一字不易納入組織，筆者並不意外。填空第2題的答案的兩小題都有 $\sqrt{2}$ ，有位同學回來告訴我，他把 $\sqrt{2}$ 寫成了 $1/3(\sqrt{2}+\sqrt{8})$ ，結果少了10分，這是改卷人太不小心只看標準答案改卷，這種情形兩小題各扣一分也應該得個8分，我要他去複查，希望複查閱卷人有責任感有些理念不能全扣光的。

填空第3題要學生由定義推出拋物線的標準式，再利用積分求區域面積與旋轉體的體積。作對這一題的不會多，根據筆者經驗標準式能定義出來的就不多，所以就無法求面積與體積了。

填空第4題用到了三角。自民國75年暑期輔導筆者發現學生的三角程度低落，查查課本，他們這一屆開始，三角只學了一個半月左右，以往都是學一個學期。甚麼都可以速成，只有學問不能速成。這題用到了 $y=\sin x$ 的圖形以及二倍角公式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ，今年暑期輔導的105名學生裡有31名作對，參加大專聯考的高中畢業生當然也會有一些作對的。另外現行高中數學教材，沒有正式提到反三角函數，有些學生可能會猜到一些特別角，而

本題兩格分別獨立計分，可能有些學生猜對，這樣的設計方式應儘量避免。

填空第5題用到了分點公式，設 $P(a, b)$ ， $Q(c, d)$ ， $X(x, y)$ ， $P-X-Q$ ， $PX:XQ=k$ ，則 $X(a+kc)/(1+k)$ ， $(b+kd)/(1+k)$ ，還要解一組二元二次聯立方程式，105名學生裡有22名作對。

計算第2題105名學生裡只有6人作對，這一題先要求兩個式子 $f(x)$ ， $g(x)$ 的最高公因式，才能求得含兩個方程式 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 公根的方程式，再求這個方程式實根在那兩個相鄰整數之間，所以作對的很少自是不在話下。這一題算對了 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式，應該可以得到一半以上的題分。

計算第3題只有14個學生作對，補習班贈閱的解答大都用了偏微分，讓人覺得不可思議，也有高中老師教學生求圓錐曲線平行弦中點的集合時，用了偏微分，只是教學生作出來，知其然而不知其所以然，沒有整體概念，不是傳道授業應有的態度，這一題也是數據有些繁複，作一遍就知道了。

第4題考了矩陣乘法又融合了二項係數，如果沒有想到組合總數 2^n-1 ，算起來很費時間，一不小心就浪費了時間又沒有得到分數。今年畢業的兩班學生幾乎都是全軍覆沒，矩陣是很重要的工具，十五、六年前就聽過讀物理系的學生說，很多高級課程都用到了矩陣，它的表達方式又很抽象很為它傷腦筋，不過在中學這個階段實在沒有必要太強調，在大學裡用到矩陣也是二、三年級以後的事了，有興趣的讀者不妨把它作作看，要花多少時間。這一題的最大缺點是鑑別不出學生好壞來，除了極少數資賦優異的學生，其它的高手、中手、低手都交了白卷。它也有嚇阻作用，讓沒有信心的學生都不敢碰，如果把次數改低些，如三次或四次，作對的學生就會多得多了。

今年這份自然組試題整個說來最大的缺失在於不平均，三角的配分極少，三角在高中數

學教材裡佔了很大的比重，命題人似乎是有意忽略它，實在不應該有這種心態，當然某年大專聯考自然組數學試題與三角有關的佔了百分之四十五，也不是命題應有的方式；至於第〔子〕小題求 $1-\sqrt{3}i$ 之一平方根，不用三角也

可以作，把它設作 $(x+yi)^2$ ，再解一個二元二次聯立方程式就可以了。不考三角是不公平的，不會三角的考生佔了便宜。把試題按高中六冊數學出處列表，就可以看出來分配極不公平。

冊 數	題 號	分數或百分比
一	〔子〕二	20
二	填 空 題 4	10
三	填 空 題 2, 5 計 算 題 三	30
四	〔丑〕	10
理科數學上	填 空 題 1, 3	20
理科數學下	計 算 題 四	10

整體說來，這次自然組的試題數據沒有仔細斟酌，所以不太能把考生的程度表現得恰如其分。配分也有問題，不宜讓學生一差就是十分，差距太大，我教的學生張俊雄在全國數學競試名列第七，這次得了 79 分，我覺得遺憾，像他這種程度應該在 95 分左右試題才算正常，爲了學子的前途，大專聯考不妨全部以填空方式命題，出上四十個或五十個填空，由淺入深，幾乎把高中六冊課本重要部分都能涵蓋，既沒有僥倖也沒有遺憾！從以上的表裡看出來第二、四冊都是僅佔百分之十是少了些，理科數學上下二冊佔百分之三十是正常的。入學試題與學校裡月考、期考不同，不宜只偏重某冊或某章某節，今年的台北區公立高級中學聯合招生的數學試題就極爲偏頗。

七月十日在師大附中參加北市高中聯招閱卷，所以把今年的數學試題作了一遍，滿分是 120 分，其中與幾何或圖形有關的部分佔了 87 分，這不是命題應有的方式。中央日報有位女士曾有這樣子的讀者投書〔編輯先生：小兒在大學讀書，他說教授講的，作文猶如解大便，想怎麼解就怎麼解。編輯先生，我實在氣壞了大學教授說話怎麼可以這麼粗鄙呢？〕由此可見這位太太沒有讀過大學，她以爲大學教授都是恂恂儒雅、學有專長、有學者風。其實這位

教授說的是想怎麼寫就怎麼寫，並沒有錯，只不過表達方式粗魯了些。可是命題人不能出題猶如解大便，想怎麼出就怎麼出。

命題人沒有仔細看國中課本，只是以一個高中教師對國中數學的一種“想當然耳”的想法來命題，很多重要章節都略而不出，或者是輕描淡寫的一筆帶過，從小學到初中畢業所學到的數學是一輩子都用得到的數學，分解因式是初中數學的重要里程，更是很多學生的共同“學習高原”，試題裡只有填空第 4 題裡求二次函數 $y=x^2-2x-3$ 的圖形與 x 軸的交點 A, B 時好像是要分解因式，其實只要代入幾個整數值試試就成了，它不能算是考了分解因式。略去重要章節對不會的學生是福音，對用功的學生是不公平的。有興趣的讀者不妨把國中六冊課本拿來比對一下，略去的章節多得驚人。

大專聯考的三角極少，向量、空間的平面與直線與統計各章節均付厥如；高中聯考又太偏重與幾何或圖形有關部分，希望下年度都能改進。

今年的高、低標準是	42	26
和去年的比較一下	46	32
和前年的比較一下	48	33

無論高、低標準都是三年來最低紀錄。從低標準看來，這是最難的一次。