數學往事

陳轟德

許多人對學生時代的往事，多少都留下一些記憶，但對數學的往事能留下記憶的可能並不多。

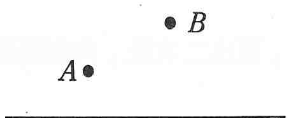
我高中是念福州私立格致中學，是一所教會辦的學校，師資之好，升學率之高，學費之貴是福建有名的，清大翁寶山教授就是我當年的同學，當時數學是分成大代數、解析幾何、平面幾何、三角等四科教學，教大代數的老師我們都叫他“殺猛熊”，因爲他每遇到數學中的Σ符號，都唸成“殺猛熊”，而且鏗鏘有勁，腔調怪異，至於爲什麼會唸得那麼離譜，我們都不知道，大概是和福州的方言有關，“殺猛熊”老師除了Σ讀音有毛病外，其他讀音都很正常，他經常和我們談數學往事，他談到自己考大學那年有一位考生，平面幾何一題都不會，一時悲從中來，就在答案卷上寫了一首打油詩“請問歲月有幾何，何必一定學幾何，學了幾何有何用，不學幾何又如何。”閱卷教授看得火冒三丈，給他零分（當時入學考試有學校規定，任何一科零分時，不能錄取）。不料此事被該校文學院院長知道，經打聽，原來該學生就是院長心儀已久，常在國內各報發表文章，筆名××的學生，他向校長力保，幾經折衝，最後錄取了該學生。

“殺猛熊”老師不但教學生動，而且爲人也風趣，他教我們排列組合課的那一學期，出一道讓我們一輩子不會忘記的考題，「抓抓癢癢，癢癢抓抓，愈抓愈癢，愈癢愈抓，作環狀排列，有幾種不同的排法。」同學們看到此題彼此互瞄一眼，嘴巴都咧著會心的微笑，没過多久，教國文的老師得知消息，就在班上公開徵求下聯，再過不久，有同學竟然拿著下聯去找國文老師「生生死死，死死生生，先生先死，先死先生」。弄得國文老師啼笑皆非。

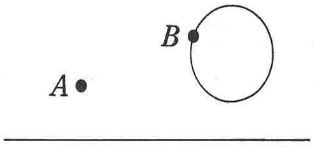
當時各大學多採取單獨招生，由於數學分成四科教學，所以入學考試也分成四科進行，每一科考試的時間大約是一小時半，考題都在五題至七題左右，由於考題少，考試時間長，所以每一題的難度都頗高，每一大題中常又含著許多小題，這是當時數學試題的特色，記得平面幾何有一題是這樣的

「求在下列各圖的直線上作P點，使$\overline{PA}+\overline{PB}$爲最短」

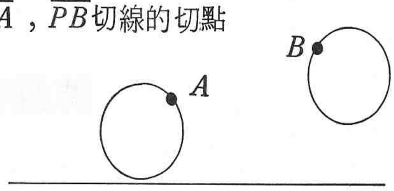
(1)A，B爲直線同側的兩相異點



(2) A 點與圓均在直線同側，B 爲切線 $\overline{PB}$ 的切點



(3)兩圓互相外離，且在直線同側，A，B 分別爲 $\overline{PA}$，$\overline{PB}$ 切線的切點



這種命題的方式，臺大初期也常採用，如今像這種難度高，題量少，考試的時間長的命題方式已不多見，替代的是難度低，題量多，考試時間短的命題方式，其中到底意味著什麼？大概是現在知識爆炸，只好用較短的時間，做較多難度低的事，果眞如此，豈不是現代人功利主義的寫實。

初中我是唸林森縣中，那時正值八年抗戰，我隨學校流亡到永泰青溪的山區，落脚在數大間遜淸官宦破落的府第，教學沒有黑板，都是用口述，有一次，數學老師講代數與算術的不同時，他說代數是用符號 x 代替未知的數，再由已知條件列出方程式求 x，所以學了代數以後，許多算術問題都可以用代數解決，但是算術所用的思考方法不能完全拋棄。他說一則類似寓言的故事，以前有一位老太太賣雞蛋，拿了一籮筐雞蛋，走到第一家，賣出蛋數的一半又半個，走到第二家，再賣出剩下的一半又半個，走到第三家，再賣出剩下的一半又半個，如此連續賣了六家，雞蛋剛好賣完（雞蛋是生的，不能切開賣），問老太太出門時，籮筐裏共有幾個雞蛋。這種題目如果用代數解，先設有雞蛋 x 個，則賣出一次後，尚剩雞蛋 $x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$ 個，賣出二次後，尚剩雞蛋 $[x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})]-\{\frac{1}{2}[x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})]+\frac{1}{2}\}$ 個，……如此繼續六次，所立的算式豈不洋洋大觀，何況演算也不簡單。如果換用算術解法，就簡單得多，因爲到達第六家時，籮筐必定只剩下一個雞蛋，才能使賣去一半又半個後，剛好賣完，往前推，到達第五家時必定只剩下 3 個雞蛋，才能使賣出一半又半個後，剩下一個，再往前推，就可推得出門時，籮筐共有 63 個雞蛋，老師這段話，深刻我心，對我後來爲學治事都有深邃的影響，當然我也發現，學了座標幾何後，也不能完全拋棄平面幾何。

我小學是在自己的鄉村唸的，那時我是從私塾被政府趕到小學去，我在私塾唸了兩年，學齡已高，所以我被編入小學三年級，由於私塾只教四書五經，沒有教數學，進小學後最感頭痛的就是數學。記得老師先教我們認識數字，再教我們加減乘除，老師要我們牢牢記住演算的法則“先乘除，後加減”，有一次我碰到兩個除法符號在一起的情形，就去問老師 $2\div2\div2$ 怎麼除，老師說，碰到這種情形，是先由左邊向右計算，我說爲什麼，老師笑著說，大概數學是從外國傳到中國，外國人寫字的習慣是從左向右，所以計算的習慣也是由左向右，我當時只好說“哦！哦！”如今想起來，那種說法太不邏輯，我們是中國人，中國人寫字的習慣是由右向左，爲什麼傳到中國後，不改爲由右向左？時隔多年，不幸的是我仍在現行的國中教科書中發現這種算式（見國中基礎數學第一册第 74 頁例 8

求 $\frac{2}{7}\div(-\frac{4}{5})\div(\frac{3}{10})$ 的值—— 79年8月改編本再版）爲了查證此事，曾到就近的永和網溪國小，查看小學的教師手册，果然，教師的手册仍然寫著由左向右演算，殊不知這種指導老師教學的手册犯了數學的大忌。數學結構中有一個極重要的“結合律”，有結合律的演算，結合符號（ ）可以省掉，如 a，b，c 表

實數時，$(a+b)+c=a+(b+c)$ 意即 a 與 b 先加，然後再加 c，和 b 與 c 先加，然後再加 a 結果相同。我們稱實數的加法有結合律，有結合律的運算可以把結合符號（ ）省掉，直接寫成 $a+b+c$，又如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表向量時，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$，意即 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 先內積後，再內積 $\vec{c}$，和 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 先內積後，再內積 $\vec{a}$，其結果不同，我們稱向量的內積沒有結合律，沒有結合律的運算，不能把結合符號（ ）省掉。一旦省掉，即失去意義，所以沒有括號的 $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ 就沒有意義，同理，因為除法運算沒有結合律，所以 $2\div2\div2$ 也沒有意義，如果要使它有意義，只要加上結合符號（ ）就可以，如 $(2\div2)\div2=\frac{1}{2}$，$2\div(2\div2)=2$，意義就非常清楚。為何編教科書的編輯群沒有一個人看出蹊蹺，難道是編教科書的先生不懂結合律？

其實，現行的中等數學教科書尚有許多基本上的缺失，使學生無所適從。例如：質數的定義，“每一個大於1的正整數 a 最少有兩個正因數，即1與 a 本身，如果一個大於1的正整數 p，只有1與 p 兩個正因數，我們就稱 p 為質數。例如：2，3，5……都是質數，1，4，6……都不是質數”。至於 -2，-3 是不是質數，沒有定義，學生遇到 -2，-3 是不是質數問題時，沒有地方可以查證。又如設 $i=\sqrt{-1}$，而 $\sqrt{-2i}$ 是不是有意義，教科書中也沒有交代，據我所知，在臺灣 $\sqrt{-2i}$ 是無意義，在日本 $\sqrt{-2i}$ 是有意義，而且 $\sqrt{-2i}=\pm(1-i)$ 我們的學生看到日文數學書籍時，心中很是納悶，我想大概是編中等數學教科書的先生們，沒有長期從事中等數學教學所致，沒有長期與中等數學接觸的人，嚴格說是沒有資格來編寫中等數學教科書的。我認為，中等數學的教科書應由長期從事中等數學教學的老師來編寫，因為他們懂得其中缺失，懂得成長中的孩子需要用什麼方式與之溝通，也懂得他們所需的是什麼，為何教育部不向學校與民間廣徵稿件，再交給高層次的學者篩選，最後再由教育部整合交由國立編譯館編印，而不是把這些繁重的編寫工作交付給負有盛名的學者，因為負有盛名的學者本身工作量已很大，加上處理國際事務的工作，那有時間編寫，到時候還不是找一些相關的人，擬出編寫大綱，再交一些人士編寫，由於掛名的權威，不敢有人過問，造成現行高中數學教科書“只見主幹，不見枝葉，只顧說理，不顧應用例”的寫法，也造成市面參考書氾濫與猖獗，另外，編教科書也應有自己的風格，不要一味抄襲外來，譬如，數學中常見的等號有五種，各國雖在沿用，但還沒有那個國家作明確的規定，如果我們首先提出規定，也許其他國家就會來仿效我們，這五種等號就是

規定“＝”為條件等的等號

如 $x=4$，意即僅當 x 為4時，等號成立

規定“≡”為恆等的等號

如 a，b 為實數，則 $(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$，意即不論 a，b 是什麼實數，此等式恆成立。

規定“≐”為近似等的等號

如 $\sqrt{2}\doteq1.414$ 意即 $\sqrt{2}$ 的值很接近於1.414

規定“≑”為極限等的等號

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n ≑ 0$ 意即 $\frac{2}{3}$ 無限次乘方後，其值無限接近於0

規定“≌”為圖形等的等號

如 $\Delta ABC\cong\Delta PQR$ 意即 ΔABC 與 ΔPQR 圖形完全能重合。

以上是回憶數學往事時所引起的感想，其實教育的問題非常多，這篇小文只談數學往事，讓後輩也能與我共享往事的歡樂。