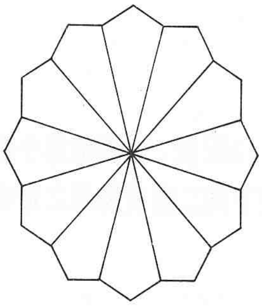
㈢將下圖所示正十二角星形及其中心共二十五個交點由1至25適當配號，可使每一個小四邊形四個頂點之號數和均相等，試求一解。〔提示：可模仿本文所用之解法試配之。〕

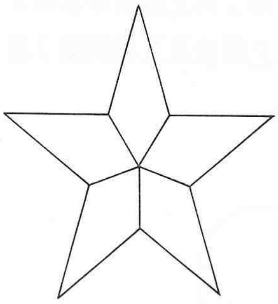
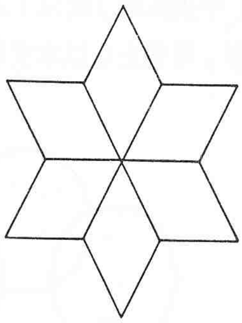
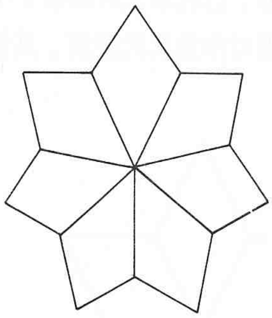
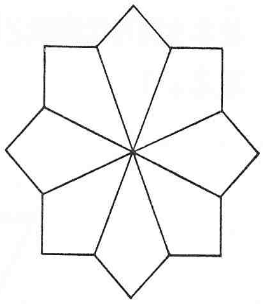


15202　n角星形配號問題

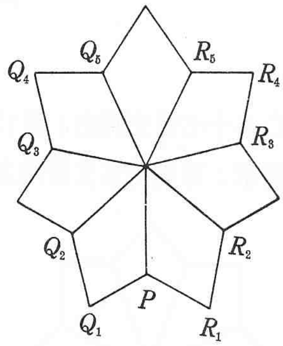
優勝名單：

良好：胡豐榮（內灣國小）

參考答案：（張國男提供）

若 $5\leqslant n\neq 6$，則必無合乎上列條件之配號法。茲爲方便計，以如下所示正七角星形之圖爲例，說明如次：



設有某配號法能使共線四點之號數和（即第一類和）均爲 S，且使外圍三角形三頂點之號數和（即第二類和減去中心所配之號數）均爲 T。對於此配號法，考慮折線 $PQ_1Q_2Q_3Q_4Q_5$：因三角形 PQ_1Q_2 與 $Q_3Q_4Q_5$ 均爲外圍三角形，且 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 四點共線，故 P 與 Q_5 二點所配之號數和爲

(Ⅲ) $T=21$ ，內徑和 $=13$ ，外徑和 $=16$ ，$A+C+E=B+D+F=24$ 。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對爲(1,12),(2,11),(3,10),(5,8)與(6,7)，可供三條外徑選配之數對爲(3,13),(5,11),(6,10)與(7,9)。因2只出現於(2,11)，故(2,11)應取，而(5,11)應棄，遂知三條外徑可配之數對應爲(3,13),(6,10)與(7,9)。但由(3,13)與(6,10)中各取一數，無法與7作出和爲24之三數組，而此與 $A+C+E=B+D+F=24$ 相悖，故知此情形必然無解。

(Ⅳ) $T=22$ ，內徑和 $=15$ ，外徑和 $=14$ ，$A+C+E=B+D+F=21$ 。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對爲(2,13),(3,12),(5,10),(6,9)與(7,8)，可供三條外徑選配之數對爲(1,13),(2,12),(3,11),(5,9)與(6,8)。因1只出現於(1,13)，故(1,13)應取，而(2,13)應棄，故(2,12)應取，而(3,12)應棄，故(3,11)應取，遂知三條外徑可配之數對應爲(1,13),(2,12)與(3,11)。但由(1,13)與(2,12)中各取一數，無法與3作出和爲21之三數組，而此與 $A+C+E=B+D+F=21$ 相悖，故知此情形必然無解。

(Ⅴ) $T=23$ ，內徑和 $=17$ ，外徑和 $=12$ ，$A+C+E=B+D+F=18$ 。

在此情形之下，可供三條內徑選配之數對爲(5,12),(6,11),(7,10)與(8,9)，可供三條外徑選配之數對爲(1,11),(2,10),(3,9)與(5,7)。因1只出現於(1,11)，2只出現於(2,10)，3只出現於(3,9)，故此三個數對皆應取，遂知三條外徑可配之數對應爲(1,11),(2,10)與(3,9)。但由(1,11)與(2,10)中各取一數，無法與3作出和爲18之三數組，而此與 $A+C+E=B+D+F=18$ 相悖，故知此情形必然無解。〔另一論證：因(1,11),(2,10)與(3,9)皆應取，故(6,11),(7,10)與(8,9)皆應棄，而三條內徑可配之數對僅剩(5,12)矣！因不敷使用，故知此情形必然無解。〕

(Ⅵ) $T=24$ ，內徑和 $=19$ ，外徑和 $=10$ ，$A+C+E=B+D+F=15$ 。

在此情形之下，可供三條內徑選配之數對爲(6,13),(7,12),(8,11)與(9,10)，可供三條外徑選配之數對爲(1,9),(2,8)與(3,7)。因三條外徑應配三個數對，故(1,9),(2,8)與(3,7)皆應取。但由(1,9)與(2,8)中各取一數，無法與3作出和爲15之三數組，而此與 $A+C+E=B+D+F=15$ 相悖，故知此情形必然無解。〔另一論證：因(1,9),(2,8)與(3,7)皆應取，故(7,12),(8,11)與(9,10)皆應棄，而三條內徑可配之數對僅剩(6,13)矣！因不敷使用，故知此情形必然無解。〕

(Ⅶ) $T=25$ ，內徑和 $=21$ ，外徑和 $=8$ ，$A+C+E=B+D+F=12$ 。

在此情形之下，可供三條內徑選配之數對爲(8,13),(9,12)與(10,11)，可供三條外徑選配之數對爲(1,7),(2,6)與(3,5)，故無選擇餘地，即六個數對應全取。

因可供三條外徑選配之數對爲(1,7),(2,6)與(3,5)，而 $A+C+E=B+D+F=12$ ，可知 A ，C ，E 與 B ，D ，F 所構成之三數組鏈爲(1,5,6)+(2,3,7)，故可設 $A=1$ ，$C=6$ ，$E=5$ ，而得 $B=3$ ，$D=7$ ，$F=2$ 。又由 G ，H ，$I\in\{8,9,10,11,12,13\}$ ，$G+H=24$ ，$H+I=22$ ，可知 $\{G,H\}=\{11,13\}$ ，$\{H,I\}=\{9,13\}$ 或 $\{10,12\}$ ，故 $H=13$ ，$G=11$ ，$I=9$ 。據此，由內徑可配之數對或 T 之值均易知 $J=10$ ，$K=8$ ，$L=12$ ，遂得圖1所示之代表解。

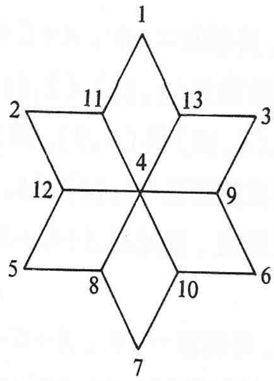


圖1

〔丙〕M＝7，S＝28。

（Ⅰ）$T=18$，內徑和＝8，外徑和＝20，$A+C+E=B+D+F=30$。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對僅有（2,6）與（3,5）二個，因不敷使用，故知此情形必然無解。

（Ⅱ）$T=19$，內徑和＝10，外徑和＝18，$A+C+E=B+D+F=27$。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對爲（1,9），（2,8）與（4,6），可供三條外徑選配之數對爲（5,13），（6,12）與（8,10），故無選擇餘地，即六個數對應全取。因6（或8）出現二次〔或謂：因3（或11）未出現〕，故知此情形必然無解。

（Ⅲ）$T=20$，內徑和＝12，外徑和＝16，$A+C+E=B+D+F=24$。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對爲（1,11），（2,10），（3,9）與（4,8），可供三條外徑選配之數對爲（3,13），（4,12），（5,11）與（6,10）。因1只出現於（1,11），故（1,11）應取，而（5,11）應棄。因2只出現於（2,10），故（2,10）應取，而（6,10）應棄。如是，則三條外徑可配之數對僅剩（3,13）與（4,12）矣！因不敷使用，故知此情形必然無解。〔另一論證：因5只出現於（5,11），故（5,11）應取，而（1,11）應棄。因6只出現於（6,10），故（6,10）應取，而（2,10）應棄。如是，則三條內徑可配之數對僅剩（3,9）與（4,8）矣！因不敷使用，故知此情形必然無解。〕

（Ⅳ）$T=21$，內徑和＝14，外徑和＝14，$A+C+E=B+D+F=21$。

在此情形下，可供三條內徑選配之數對爲（1,13），（2,12），（3,11），（4,10），（5,9）與（6,8），可供三條外徑選配之數對亦爲（1,13），（2,12），（3,11），（4,10），（5,9）與（6,8）。

可供共線四點（或謂：可供含有四個交點之直線）選配之四數組，可求之如下：先由1，2，3，4，5，6，8，9，10，11，12與13共十二個數，作出和爲$S=28$之四數組，得
（1,2,12,13），（1,3,11,13），（1,4,10,13），（1,4,11,12），（1,5,9,13），（1,5,10,12），（1,6,8,13），（1,6,9,12），（1,6,10,11），（1,8,9,10），（2,3,10,13），（2,3,11,12），（2,4,9,13），（2,4,10,12），（2,5,8,13），（2,5,9,12），（2,5,10,11），（2,6,8,12），（2,6,9,11），（3,4,8,13），（3,4,9,12），（3,4,10,11），（3,5,8,12），（3,5,9,11），（3,6,8,11），（3,6,9,10），（4,5,6,13），（4,5,8,11），（4,5,9,10），（4,6,8,10），（5,6,8,9）。
因共線之四個交點既不含同一條內徑之兩個端點，亦不含同一條外徑之兩個端點，故應將上列四數

組中有二數和爲 14 者全部棄去，遂知僅有下列十六個四數組可供選配：
(1,4,11,12), (1,5,10,12), (1,6,9,12), (1,6,10,11), (1,8,9,10), (2,3,10,13), (2,4,9,13), (2,5,8,13), (2,5,10,11), (2,6,9,11), (3,4,8,13), (3,4,9,12), (3,5,8,12), (3,6,9,10), (4,5,6,13), (4,5,8,11) 。

由上列十六個四數組，易知經過 1 之二條直線可選配之四數組必爲(1,4,11,12)與(1,8,9,10)。茲設直線 ℓ_1 配以(1,4,11,12)，直線 ℓ_2 配以(1,8,9,10)。參見六角星形圖，考慮內徑與外徑，可知與 ℓ_1 平行之直線 ℓ_3 必配以(1,4,11,12)之補數組(2,3,10,13)，與 ℓ_2 平行之直線 ℓ_4 必配以(1,8,9,10)之補數組(4,5,6,13)。再由上列十六個四數組，易知經過 2 之另一條直線 ℓ_5（應與上述四條直線均各交於一點，且不經過 1，4，10，13 ）必配以(2,6,9,11)，故與 ℓ_5 平行之直線 ℓ_6 必配以其補數組(3,5,8,12)。由是，遂得四數組鏈(1,4,11,12)+(1,8,9,10)+(2,3,10,13)+(4,5,6,13)+(2,6,9,11)+(3,5,8,12)。據此，於六角星形上實際試配，可得圖 2 至圖 5 以爲代表解。〔附記：將圖 2 至圖 5 旋轉 180°，即得各圖之補解。〕

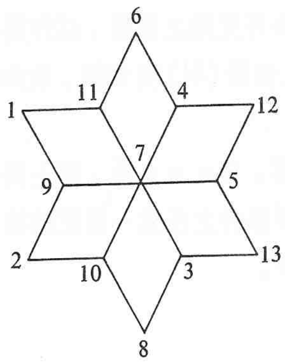


圖2

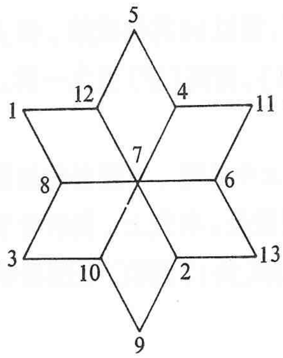


圖3

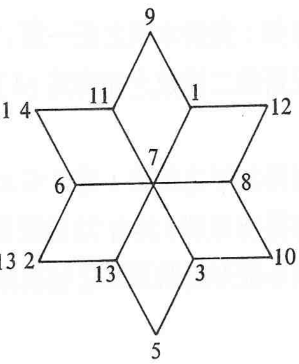


圖4

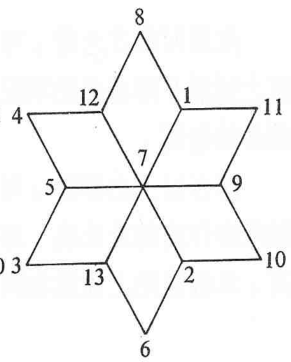


圖5

(V) $T=22$，內徑和 $=16$，外徑和 $=12$，$A+C+E=B+D+F=18$ 。

注意 M，S 與 T 之値，可知：對於此情形下之任一解，若以 14 爲被減數，減去各交點之號數，以作爲新配之號數（即各交點所配新舊二號數之和均爲 14），則得(Ⅲ)之一解。但因(Ⅲ)無解，故知此情形必然無解。

(VI) $T=23$，內徑和 $=18$，外徑和 $=10$，$A+C+E=B+D+F=15$ 。

仿(V)推理，因(Ⅱ)無解，故知此情形必然無解。

(VII) $T=24$，內徑和 $=20$，外徑和 $=8$，$A+C+E=B+D+F=12$ 。

仿(V)推理，因(Ⅰ)無解，故知此情形必然無解。

〔丁〕M＝10，S＝27。

注意 M 與 S 之値，可知本項與〔乙〕項互補，故圖 1 之補解可作爲本項之代表解。如是，即得圖 6。

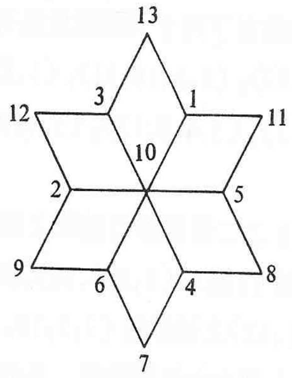


圖6

〔戊〕M＝13，S＝26。

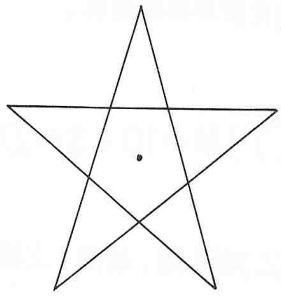
注意M與S之值，可知：對於本項之任一解，若以14爲被減數，減去各交點之號數，以作爲新配之號數（即各交點所配新舊二號數之和均爲14），則得〔甲〕項之一解。但因〔甲〕項無解，故知本項必然無解。

綜合以上之探討，可得如下之結論：當$5 \leqslant n \neq 6$時，本題必然無解。當$n = 6$時，將上列6個代表作旋轉及反映，即得所有解；共有72種配號法。事實上，對於合乎條件之任意一種配號法而言，共線四點之號數和與小菱形四個頂點之號數和（共12個和）全部相等。

評　註

茲對上述解法及相關問題作若干評註：

首先，應注意：本解答最初之推導，對於$n = 5$之情形亦適用。（此時$Q_3 = R_5$，$Q_4 = R_4$，且$Q_5 = R_3$。）顯然，當$n = 5$時，考慮較短之折線$PQ_1Q_2Q_3Q_4$與$PR_1R_2R_3R_4$（其中$Q_4 = R_4$），注意三角形PQ_1Q_2與PR_1R_2均爲外圍三角形，且Q_1，Q_2，Q_3，Q_4四點與R_1，R_2，R_3，R_4四點各自共線，亦可證得相同之結論。事實上，由「五角星形配號問題㈠」及其後所附之習題㈡，可知：將下圖所示正五角星形之十個交點及其中心由1至11配號，必不能使共線四點之號數和均相等。



其次，在此特地指出：模仿本文對〔乙〕(Ⅶ)所用之處理法，亦可求得〔丙〕(Ⅳ)之解。茲參考圖1之求法，將解題步驟敍述於下：先由可供三條外徑選配之數對，依據$A+C+E=B+D+F=21$之條件，求出A，C，E與B，D，F可選配之三數組鏈，並在「同類12解僅列出一解以爲代表」之許

可下，權宜選取A，C，E（或B，D，F）之值，以求出三條外徑六個端點之配號，然後再依據$T=21$之條件，考慮六角星形內部正六邊形某三個連續頂點之配號（例如G,H,I），…。讀者不妨以此爲習題，實際演練之。

復次，若讀者已閱畢「六角星形配號問題㈠」或其㈡，並已解出其後所附之相關習題，自亦可從中篩選出合乎條件之配號法而得$n=6$時之全部解；但若如此進行以求解，則其工程浩大矣！

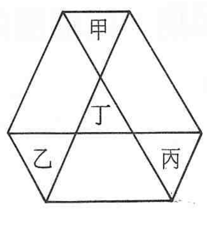
再者，若要求之條件爲兩類和全部相等（即$S=T+M$），則問題簡化多矣，本文之解法仍然適用，但只需處理$5 \leqslant n \neq 6$，〔乙〕(Ⅶ)，〔丙〕(Ⅳ)，以及〔丁〕中與〔乙〕(Ⅶ)互補之情形，即可推得與原題之結論相同之結果，其餘情形自然全部歸於烏有。

最後，將本題之條件放寬，而提出下列二個難題，供有志讀者研究：㈠欲使第一類n個和均相等，是否有解？若無，試說明其理由；若有，試求所有配號法。㈡欲使第二類n個和均相等，是否有解？若無，試說明其理由；若有，試求所有配號法。〔註：事實上，前四文所處理之五角星形配號問題㈠與㈡，六角星形配號問題㈠與㈡，本文所探討之n角星形配號問題，以及前四文所附之相關習題，皆包含於此二問題內，但僅爲其中之極小部分；其餘絕大部分之問題，則猶待解決也。〕

習　題

㈠模仿本文對〔乙〕(Ⅶ)所用之處理法，試求〔丙〕(Ⅳ)之所有解。

㈡將下圖（Thomsen圖形）之九個交點由1至9配號，以處理下列各問題：(i)使甲，乙與丙各三角形三頂點之號數和均相等，試求所有配號法。(ii)使甲，乙，丙與丁各三角形三頂點之號數和均相等，試求所有配號法。(iii)使圖中三角形（三大四小）三頂點之號數和均相等，試求所有配號法。(iv)使共線四點之號數和均相等，且甲，乙與丙各三角形三頂點之號數和亦均相等，是否有解？



㈢(i)將下圖所示之12個交點由1至12配號，使共線四點之號數和均相等，甲類四邊形區域四頂點之號數和均相等，且乙類四邊形（等腰梯形）區域四頂點之號數和亦均相等，欲求所有配號法，試述解題之步驟，並據此以求出一解。(ii)將下圖所示之12個交點由1至12配號，使共線四點之號數和均相等，且甲類四邊形區域四頂點之號數和亦均相等，欲求所有配號法，試述解題之步驟，並據此以求出一解，但此解不得爲(i)之任一解。