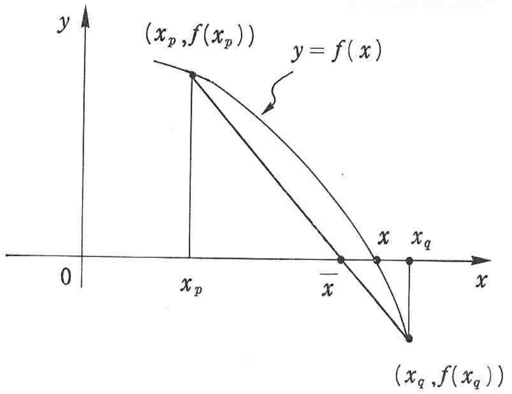
# 就高次方程解法
# 評價古代中國數學

林聰源

## 1.霍納法

高次方程的解法在西方數學文獻中，以霍納氏（Horner's）法最爲有名。設$\alpha$爲方程$f(x)=0$之一根，而$x_p$，$x_q$爲其近似值，設$f(x_p)>0$，$f(x_q)<0$。取$\bar{x}=〔x_q f(x_p)-x_p f(x_q)〕/〔f(x_p)-f(x_q)〕$，並試$f(\bar{x})$之正負，若$f(\bar{x})$爲正，則再取$\bar{x}$與$x_q$爲其二近似值，反覆進行（若$f(\bar{x})$爲負，則取$x_p$與$\bar{x}$爲其二近似值，反覆進行）。利用這個方法可逐步找出方程$f(x)=0$之近似解，這是一種很有效的高次方程數值解法。

霍納（1786-1837）是英國人，他在1819年提出上面的方法。這種方法也可稱爲雙試位法（double false positions），其淵源可上溯至中世紀的阿拉伯以及更古的印度。




## 2.雙試位法

連接$(x_p, f(x_p))$與$(x_q, f(x_q))$之直線方程式爲

$$y-f(x_q)=\frac{f(x_p)-f(x_q)}{x_p-x_q}\cdot(x-x_q)$$

令$y=0$，

$$-f(x_q)=\frac{f(x_p)-f(x_q)}{x_p-x_q}(x-x_q)$$

便得解 $\bar{x}=x_q-f(x_q)\cdot\dfrac{x_p-x_q}{f(x_p)-f(x_q)}$

$$=\frac{x_q〔f(x_p)-f(x_q)〕-f(x_q)(x_p-x_q)}{f(x_p)-f(x_q)}$$

$$=\frac{x_q\ f(x_p)-x_p\ f(x_q)}{f(x_p)-f(x_q)}$$

此即霍納法的公式。

雙試位法的公式可在阿拉伯第一位大數學家花拉子密所寫的算術書上找到，而這本書的內容是模仿印度算法的計算規則再加以解釋的。

歷史上有記載而最早使用試位法的是埃及人。1858年蘇格蘭的考古學家蘭德（Rhind）在埃及購買到一本紙草書，大約有18英尺長，1英尺寬，產生於公元前1650年左右，是從更早的著作中抄寫下來的85個實用的數學問題。紙草的原料是蘆葦，由於埃及非常乾燥的氣候，紙草可長久保存下來。我們對古代埃及數學的了解主要即來自這些紙草書。蘭德紙草現存英國大英博物館，於1927年首次展出。85個問題中有麵包的成分，啤酒的濃度，家禽的飼料混合比例等等。學例來說，爲了解方程

$$x+x/7=24$$

先給$x$選定一個簡便的值，譬如說7，於是$x+x/7=8$而不是24。但8必須乘以3才是24，所以$x$的正確值一定是7乘以3即21。

## 3.賈憲與秦九韶

在古老的東方有一條巨龍，它的名字叫中國。宋朝的大數學家賈憲（生於1200年左右

）除了發現二項係數（西方稱爲巴斯卡三角，1653 年發現），他也給了高次方程的解法。我們舉個實例來說明：欲解 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$，此方程共有 4 個實根：$\pm 20.55480479$，$\pm 121.7476899$，得到一根的近似值 20 之後，作代換（此程序與二項係數有密切關係！）$x=20+x_1$，得輔助方程

$$-x_1^4-80x_1^3+12845x_1^2+577800x_1-324506.25=0$$

現在輔助方程的根在 0 與 1 之間。上式略去高次項之後變成

$$577800x_1-324506.25=0$$

立刻得到 $x_1$ 之近似值 $\dfrac{324506.25}{577800}=0.56162383$

與眞値差 0.00681904。

秦九韶（1202-1261）加以改進，他的高次方程解法收集在他的劃時代巨著「數書九章」中。在上述的最後一個步驟中，他並不略去高次項，而是將它們全視爲一次項，於是

$$-x_1-80x_1+12845x_1+577800x_1-324506.25=0$$

即 $\quad 590564x_1-324506.25=0$

解出 $\quad x_1=\dfrac{324506.25}{590564}=\dfrac{1298025}{2362256}=0.5494853$

與眞値差 0.005319，比賈憲的方法更好。

現在我們用霍納氏公式解這個同樣的四次方程：

$$f(x)=-x^4+15245x^2-6262506.25=0$$

$$\alpha\doteqdot 20,\ x_p=21,\ x_q=20$$

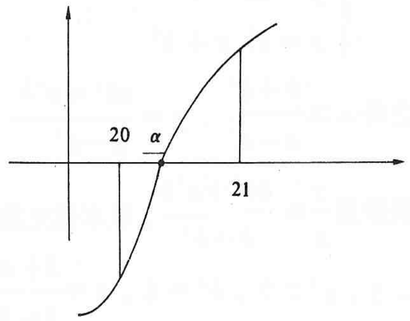
$$f(21)>0\ ,\ f(20)<0$$

$$\bar{x}=\frac{20f(21)-21f(20)}{f(21)-f(20)}$$

$$x_1=\bar{x}-20$$

$$=\frac{20f(21)-21f(20)-20f(21)+20f(21)}{f(21)-f(20)}$$

$$=\frac{f(20)}{f(20)-f(21)}$$




我們已知輔助方程

$$f(20+x_1)=-x_1^4-80x_1^3+12845x_1^2+577800x_1-324506.25$$

其中 $f(20)=-324506.25<0$，

$$\begin{aligned}f(21)&=f(20+1)\\&=12764+577800-324506.25\\&=590564-324506.25\\&=266057.75\end{aligned}$$

故 $x_1=\dfrac{f(20)}{f(20)-f(21)}$

$$=\frac{-324506.25}{-324506.25-[590564-324506.25]}$$

$$=\frac{324506.25}{590564}<\frac{324506.25}{577800}$$

由上式我們看出秦九韶的算法其實就是霍納公式，中國比西方早好百年就有了。

## 4. 盈不足術

九章算術在中國數學史上是除了周髀算經以外最古老的數學著作，也是內容最豐富，最主要的一本書。由於中國的歷史經歷了秦始皇焚書坑儒（公元前 213 年）的巨禍，我們不能確定它是什麼時候開始編寫的，有人說它可追溯至周公。經過張蒼（約公元前 200 年）的整理以及歷代的增補，到了三國時代劉徽加上自己的心得，使它更便於了解，因而流傳了下來。其中第七章是"盈不足"術。舉一題爲例：今有某實物，人出八盈三，人出七不足四，問人數，物價各幾何？答曰七人，物價五十三。以當今術語來解的話，設人數 $x$，物價 $y$，每人出 $a$ 則盈 $b$，每人出 $a'$ 則不足 $b'$，則

$$\begin{cases} y = ax - b \\ y = a' x + b' \end{cases}$$

解之得 $x = \dfrac{b+b'}{a-a'}$ ，$y = \dfrac{ab'+a'b}{a-a'}$ ，每人應出錢數爲 $\dfrac{y}{x} = \dfrac{ab'+a'b}{b+b'}$ 。以本題來說，$a=8$, $b=3$，$a'=7$，$b'=4$，$x = \dfrac{3+4}{8-7} = 7$，

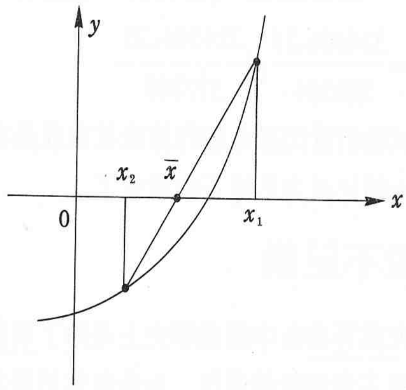
$$y = \frac{8\cdot4+7\cdot3}{8-7} = 53, \frac{y}{x} = \frac{8\cdot4+7\cdot3}{3+4} = \frac{53}{7}。$$

我們不禁要嘆服遠古時代中國的代數大大領先了全世界。

其實盈不足術就是現在的線性插間法：設 $f(x)=0$ 之一根有二近似值 $x_1$, $x_2$, $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$, 連結此二點之線段交 $x$ 軸於 $\bar{x}$，則

$$\bar{x} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1}$$

此式與上面的公式 $y = \dfrac{ab' + a'b}{a - a'}$ 本質上是一致的。




在上述公式中，

$$\bar{x} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1} = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)y_1}{y_2 - y_1}$$

令 $x_2 = x_1 + \triangle x$ . 則 $\bar{x} = x_1 - \triangle x \dfrac{y_1}{y_2 - y_1}$

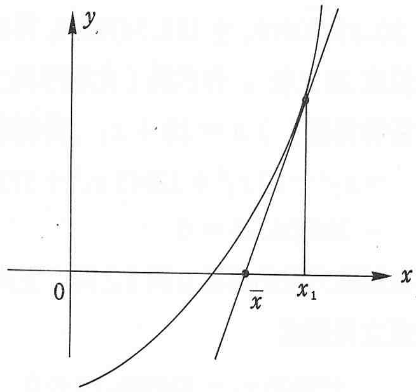
$$= x_1 - \frac{y_1}{\dfrac{y_2 - y_1}{\triangle x}}$$

當 $\triangle x \to 0$ 時, $\dfrac{y_2 - y_1}{\triangle x} = \dfrac{f(x_1 + \triangle x) - f(x_1)}{\triangle x}$

$$\to f'(x_1)$$

便得著名的牛頓逼近公式

$$\bar{x} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$




## 5.中國數學再出發

今年四月底楊振寧回母校清華慶祝八十周年校慶時，在演講中提到，中國的數學近幾百年來所以落於西方之後的一個主要原因是歐幾里得那一套推理的幾何系統是在希臘而不是在東方發明的。這就是指中國數學較重視實際問題之數值計算而無抽象系統之發展。另外，自元朝以來，由於蒙古人文化較中原落後，漢人受種族壓迫，知識份子受歧視，遊牧民族也不重視科學，因此經濟摧殘，工商衰敗，學術隨之湮滅。使言論、出版喪失自由的科學制度自隨朝(公元604年)開始，唐朝分科取士，有「明算」(數學)科，算學曾盛極一時。元朝廢考試制度，再經朱熹等人不務實際，數學遂無法發展。明朝以後八股之害，甚於焚書。清初曆法新舊之爭，由於曆法象徵帝王之權威，擁護新法(其實是比較進步的曆法)失敗的人慘遭殺身之禍。由於曆法都是數學家在搞，文字獄迭起，學者動輒得咎，學術討論人人望而止步，數學遂隨波沈淪了下去。

經過這一個世紀中國人的努力，我們已經站起來了，並且大家都有信心下一個世紀中華會更燦爛。

—本文作者任教於清華大學數學系—