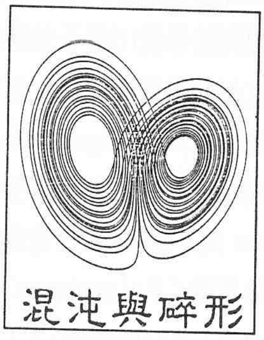


碎形(Fractal)和混沌(Chaos)中的不變量(Invariant)

金周新

一、引　言

碎形與混沌表面上似是兩門截然不同的學門，物理〔1〕、化學、生物、醫學、經濟，甚至哲學〔2〕、藝術〔3〕也相繼引入了這兩個新的名詞；其精神也只是在尋找亂中的序，動中的靜，隱晦中的明。致亂的原因在於“異數”的運動，所謂異數，顧名思義，是在我們想要討論的空間不存在的，或用以討論的邏輯是不適用的，運動的方式則決定了規律性。自然如能靜觀，明察秋毫，則自得其中的序了。

以數學的語言，我們可定義混沌和碎形同是一門尋找畸異在動態系統中不變量的學問(searching for the invariants of singularities in dynamical systems)。

舉例來說,運動的本身如滿足一遞迴關係(recurrence relation)，不變量則是遞迴關係的函數方程式。如遞迴的次數是正整數，則這個正整數的素數分解往往決定了不變量，但這不變量又往往不在正整數空間。

運動的本身如果是特定函數的疊代關係(iterative composition relation)，不變量則是疊代關係的函數方程式。函數的臨界點(critical points)將函數分成嚴格增函數和嚴格減函數，臨界點的運動給了我們其中的不變量。

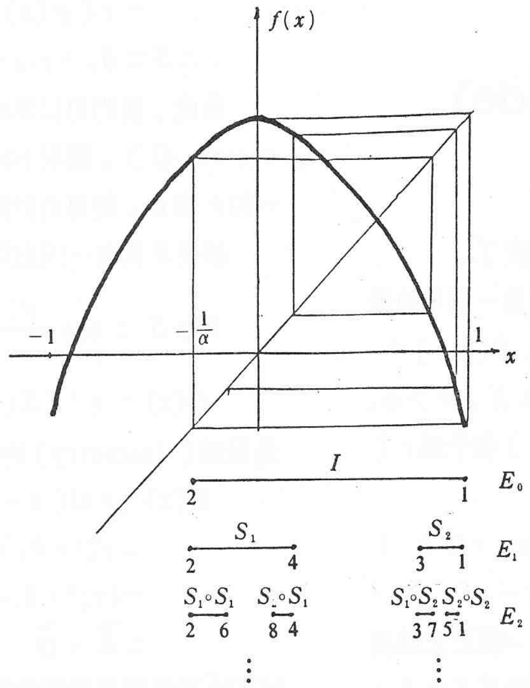
運動的本身如果是特定運算子O的連續運作，也就是說$O^n = \underbrace{O \circ O \circ \cdots \circ O}_{n}$，不變量則是這運作的函數方程式，不變量又往往只能表示成O^σ，而$\sigma \notin Z^+$。

以上的說明似是抽象、玄奧，但其中的“不變量”却是簡單至極。正如莊子解釋貌殘而“神”玄和少了七竅的“中央”之帝混沌一樣地有趣。

現在我們就來觀察兩個小例子和數學上的推理吧！

二、碎形的形成與其不變量〔4〕，〔5〕，〔6〕

如圖一，考慮一個滿足函數方程式$f(f(x/\alpha)) = -f(x)/\alpha$，$\alpha = 2.50290\cdots$，$f(0) = 1$的函數$f$，將$x = 0$的點做疊代，看看產生了什麼樣的集合，其中的不變量是什麼？



圖一

重大發現：

(i) 令 $\widetilde{r_1} = (1+\frac{1}{\alpha})/(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}) = \alpha > 0$，

$$r_1 = \widetilde{r_1}/(1+\frac{1}{\alpha})$$

$$\widetilde{r_2} = (1+\frac{1}{\alpha})/[1-f(\frac{1}{\alpha})] > 0,$$

$$r_2 = \widetilde{r_2}/(1+\frac{1}{\alpha})$$

可建立一個緊緻測度空間**康特集**(Cantor set) $C = C(r_1, r_2)$，也就是經重整化後

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = [0, r_1] \cup [1-r_1, 1]$$

$$E_2 = [0, r_1^2] \cup [r_1(1-r_1), r_1] \cup [1-r_2, 1-r_2(1-r_2)] \cup [1-r_1 r_2, 1]$$

$$\vdots$$

$$C = \bigcap_{\kappa=0}^{\infty} E_\kappa$$

所以 C 是一個拉貝測度爲零的非空集合的緊緻集，這些部分集合具有**自我相似性**(self-similarity)。

(ii) 方程 $r_1^\sigma + r_2^\sigma = 1$ 具有唯一的解 σ，$0 < \sigma < 1$。這是在產生這些自我相似唯一集合過程中唯一的不變量，我們稱之爲 $C = C(r_1, r_2)$ 的**碎形維度**。

證明：

E_1 除去了 E_0 的開集，其長度爲 ℓ_0

E_2 除去了 E_1 的開集，其長度爲 $r_1 \ell_0 + r_2 \ell_0$

$$\vdots$$

E_k 除去了 E_{k-1} 的開集，其長度則爲

$$\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} r_1^{(k-j)} r_2^{j}\right] \ell_0$$

令 $r_1^{\tilde{\sigma}} + r_2^{\tilde{\sigma}} = \eta$

$$\ell^{\tilde{\sigma}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} r_1^{(k-j)\beta} r_2^{j\beta} = \ell^\beta \eta^k$$

所有開集長度的和則是

$$\sigma = \ell^\beta (1+\eta+\eta^2+\cdots)$$
$$= \ell^\beta (1-\eta)^{-1}, \quad \eta < 1$$
$$= \infty, \quad \eta \geqslant 1$$

再經重整化可知 $r_1^\sigma + r_2^\sigma = 1$ 具唯一的解 σ。

這裡的碎形維度正是碎形最主要的特性，和物理臨界現象中的**普適性**(universality class ）有極密切的關係。

三、擬態(Similitude)與碎形

現在我們就可着手做一些推廣了。

讓我們先定義**擬態**，擬態就是一簡單的對應$S:X\to X$，具有$d(S(x),S(y))=rd(x,y)$的特性，其中$x,y\in X$，$r>0$。

如果考慮**舒張**δ（dilation）和**平移**τ（translation）。

$\delta_r:R^n\to R^n$，$\delta_r(x)=rx$，$r\geqslant 0$ ；

$\tau_a:R^n\to R^n$，$\tau_a(x)=x-a$

我們可證明一個斷論，O是一個正交轉換，$S:R^n\to R^n$是一擬態，若且唯若$S=\delta_r\circ\tau_a\circ O$

證明：

唯若部份並不困難。

如果S是一擬態。可考慮

$g(x)=r^{-1}(S(x)-S(0))$

定義內積$(x,y)=1/2[\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2]=\{[d(0,x)]^2+[d(0,y)]^2-[d(x,y)]^2\}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow[g(x),g(y)]&=1/2\{[d(g(0),g(x)]^2+[d(g(0),g(y)]^2-[d(g(x),g(y))]^2\}\\&=1/2\{[d(0,x)]^2+[d(0,y)]^2-[d(x,y)]^2\}\end{aligned}$$

$\therefore g$是保內積轉換。

這時，可找到一組R^n上的正交基底$\{e_i:1\le i\le N\}$，則$\{g(e_i):1\le i\le N\}$也是一組R^n上的正交基底，故

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{i=1}^{n}(g(x),g(e_i))g(e_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)g(e_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(x)&=rg(x)+S(0)\\&=r(g(x)+r^{-1}S(0))\end{aligned}$$

$\therefore S=\delta_r\circ\tau_{-r^{-1}S(0)}\circ g$。

由此，我們可以寫成一正則形式$S=(a,r,O)$，選取不同的正交轉換，決定唯一的r和a，便可由計算機繪出美麗的碎形。

如果S具有一固定點a，利氏常數

$$\operatorname{Lip}S=\sup_{x\neq y}\frac{d(S(x),S(y))}{d(x,y)}=r,$$

$$O(x)=r^{-1}[S(x+a)-a]$$

是保測（isometry）的，則

$$\begin{aligned}S(x)&=rO(x-a)+a\\&=\tau_a^{-1}\circ\delta_r\circ O\circ\tau_a\\&=(\tau_a^{-1}\circ\delta_r\circ\tau_a)\circ(\tau_a^{-1}\circ O\circ\tau_a)\\&=\widetilde{\delta}_r\circ\widetilde{O}\end{aligned}$$

以下的交換圖可清晰地看出擬態和碎形的結構

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "S"] \arrow[d, "\tau_a"'] & & X \arrow[d, "\tau_a"] \\ X \arrow[r, "O"'] & X \arrow[r, "\delta_r"'] & X \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{O}"] \arrow[d, "\tau_a"'] & X \arrow[r, "\widetilde{\delta}_r"] \arrow[d, "\tau_a"] & X \arrow[d, "\tau_a"] \\ X \arrow[r, "O"'] & X \arrow[r, "\delta_r"'] & X \end{tikzcd}$$

多重碎形（multifractal）則可由集合$\{S_i:i\in Z^+\}$中選取任意元素做複合函數完成。如$S_1=(a_1,r_1,O_1)$，$S_2=(a_2,r_2,O_2)$，$S_1\circ S_2$是一新的$S=(a,r,O)$，可計算出$r=r_1r_2$，$O=O_1\circ O_2$，$a=a_2+(1-r_1r_2O_1O_2)^{-1}(I-r_1O_1)(a_2-a_1)$，其中$O_1$，$O_2$是線性轉變。

證明：

$$S(x)=rO(x-a)+a$$

$$S_1(x)=r_1O_1(x-a_1)+a_1$$

$$S_2(x)=r_2O_2(x-a_2)+a_2$$

$$S_1\circ S_2(x)=r_1O_1[r_2O_2(x-a_2)+a_2-a_1]+a_1$$

$$\Rightarrow a=a_2+(1-r_1r_2)^{-1}(I-r_1O_1)(a_2-a_1)$$

以下的交換圖又可清晰地看出擬態和多重碎形的結構

$$
\begin{array}{ccccccccc}
X & \xrightarrow{S_2} & X & \xrightarrow{S_1} & X & & X & \xrightarrow{S=S_1\circ S_2} & X \\
\tau_{a_2}\downarrow & & \tau_{a_2}\downarrow\ \downarrow\tau_{a_1} & & \downarrow\tau_{a_1} & \cong & \tau_a\downarrow & & \downarrow\tau_a \\
X \xrightarrow[O_2]{} X & \xrightarrow[\delta_{r_2}]{} & X & \xrightarrow[O_1]{} & X \xrightarrow[\delta_{r_1}]{} X & & X & \xrightarrow[O]{} X \xrightarrow[\delta_r]{} & X
\end{array}
$$

回到前節一開頭的例子，可令 $S_i(x)$：$R \to R$，$S(x)=(O, r, I)$，$S_2(x)=(1, r, I)$，這裡的正交轉換是本體映射 I，E_k 則是 $\underbrace{S\circ S, \cdots \circ S}_{k}$，$S=S_1$ 或 S_2 的 k 次所有組合。

當然，其中的不變量——碎形維度 σ 可從而求得，它滿足方程式 $r_1{}^{\sigma}+r_2{}^{\sigma}=1$。

四、混沌的形成與其不變量〔7〕

如圖二，考慮 $f(x)=(a-x^2)/2$，$a=5$，經過 n 次疊代後的圖形，終久混沌一片，但其臨界點的個數或許是一個 n 的不變函數，，且與 a 值的大小有關，也就是說 $\# C\equiv \# C(n, a)$。可與線性代數中 $n\times n$ 矩陣的不變量行列式相對映。

我們可將區間〔0，1〕，分成許多有限個部份區間，令 $I_1=[-1, 0]$，$I_2=[0, 1]$，則 $I(f)=[-1, 0]\cup[0, 1]$，對於

$$I(f^2)=\bigcup_{i=1}^{4}[c_{i-1}, c_i]=\bigcup_{i=1}^{4} I_i,$$

$$f^2=f\circ f$$

$$\vdots$$

$$I(f^n)=\bigcup_{i=1}^{\# c(n,a)}[c_{i-1}, c_i]=\bigcup_{i=1}^{\# c(n,a)} I_i,$$

$$f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$$

定義一稱爲**地址的函數**(address)，可固定點 x 的運動，也就是說

$$A: f^*(x)\longrightarrow I$$

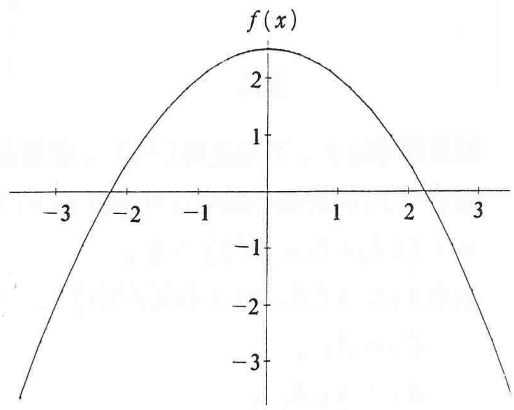
$$f^*(x)=(x, f(x), f^2(x), \cdots)$$

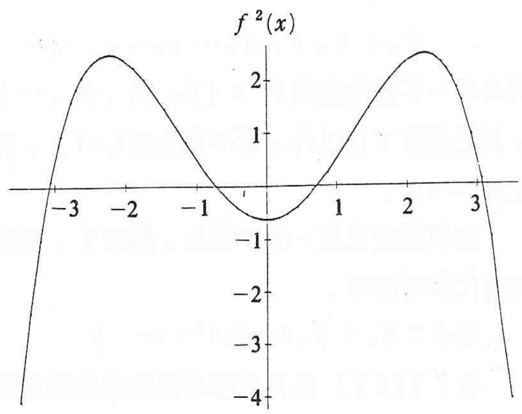
$$I=(I_0, I_1, I_2, \cdots)$$

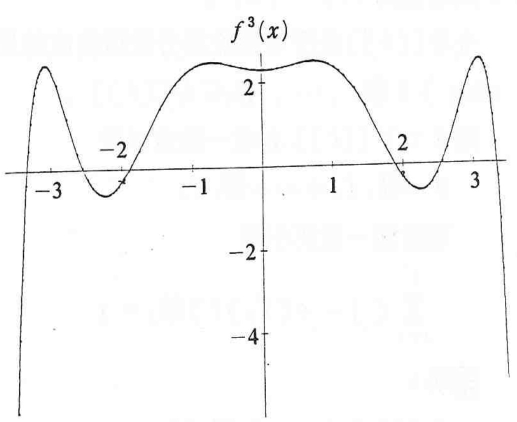
$$A(f^*(x))=(A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \cdots)=(I_0, I_1, I_2, \cdots)$$

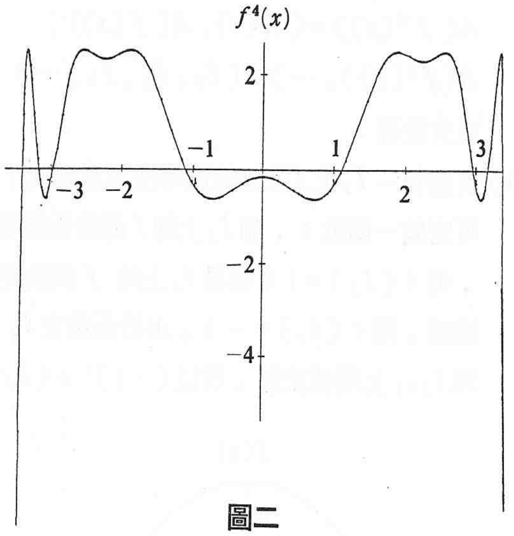
重大發現：

(i) 根據每一 I_j 上 f 函數的遞增性或遞減性，可定義一函數 ε，如 I_j 上的 f 函數是遞增，則 $\varepsilon(I_j)=1$；如果 I_j 上的 f 函數是遞減，則 $\varepsilon(I_j)=-1$。由於函數在 I_j 和 I_{j+1} 上增減交替，所以 $(-1)^j\varepsilon(I_j)$









圖二

對於所有的 j，不是全爲(+1)，就是全爲(−1)。對於臨界點 C_j，可定義 $\varepsilon(C_j) = \varepsilon((I_j+I_{j+1})/2) = 0$。

如令 $\varepsilon_k = \varepsilon(A_k) = \varepsilon(A(f^k(x)))$,

$$\theta_0 = A_0,$$
$$\theta_1 = \varepsilon_0 A_1,$$
$$\theta_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 A_2$$
$$\vdots$$
$$\theta_n = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} A_n,$$

則具有一不變的續列 $\theta^* = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots)$，其元素除了0以外，要不是全爲(+1)，就全爲(−1)。

如何找到更統一的不變量，**數字1**，可用線性代數的技巧。

令 $\theta = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \cdots$;

令 $V[[t]]$ 是具有所有係數在向量空間 V 的正規多項式所組成的自由模(free module)；其基底爲 $I_1, \cdots, I_l$。

令 $Q[[t]]$ 是所有係數爲分數所組成的環(ring)；$\text{Ⓗ}_1, \cdots, \text{Ⓗ}_l \in Q[[t]]$，

則 $\theta = V[[t]]$ 有唯一的表示法

$$\theta = \text{Ⓗ}_1 I_1 + \cdots + \text{Ⓗ}_l I_l$$

可論斷一重要引理

$$\sum_{j=1}^{l} (1 - \varepsilon(I_j) t) \text{Ⓗ}_j = 1$$

證明：

令 $h(I_j) = 1 - \varepsilon(I_j) t$

則 $h(C_j) = 1 - \varepsilon(C_j) t$

$$= 1 - \varepsilon((I_j + I_{j+1})/2) t$$
$$= 1$$

滿足引理；

$$h(A_n) = 1 - \varepsilon(A_n) t$$
$$= 1 - \varepsilon_n t$$

而 $\theta = \theta_n t^n$

$$= \sum_{n \ge 0} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1} A_n t^n$$

$$\Rightarrow h(\theta) = \sum_{n \ge 0} \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{n-1} (1 - \varepsilon_n t) t^n$$
$$= (1 - \varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_1 t) t + \cdots$$
$$= 1$$

亦滿足引理。

五、不變矩陣與不變行列式

在第一節中提到不變量可從"畸異點"的性質求得，現在我們就來觀察一下函數"臨界點"的性質。

首先定義第 i 個塑增(kneading increment v_i，而 $v_i(f) = \theta(c_i^+) - \theta(c_i^-) \in V[[t]]$。

再定義塑矩陣(kneading matrix) $[N_{ij}]_{(l-1)\times l}$ 令 $v_i(f) = N_i I_1 + \cdots + N_{il} I_l$。

則

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_l \end{pmatrix}$$

$$= [N_{ij}]^0 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_l \end{pmatrix}$$

$[N_{ij}]^0$ 是不隨函數 f 而改變的。

如果只考慮第 c_i 個的運動，利用引理，則有

$$\sum_j N_{ij} (1 - \varepsilon(I_j) t) = 0$$

令D_i是N_{ij}去除第i列的行列式，利用線性代數的方式可證明

$$D=(-1)^{i+1}D_i/1-\varepsilon(I_i)t$$

這是一個不隨i而變的量。

如何計算v_i呢？

$$\begin{aligned}v_i&=\theta(c_i^+)-\theta(c_i^-)\\&=(\theta_0(c_i^+)+\theta_i(c_i^+)t+\theta_2(c_i^+)t^2+\cdots)\\&-(\theta_0(c_i^-)+\theta_i(c_i^-)t+\theta_2(c_i^-)t^2+\cdots)\\&=(I_{i+1}-I_i)+2\varepsilon_0A_1t\\&+2\varepsilon_0\varepsilon_1A_2t^2+\cdots\end{aligned}$$

而t^k的係數則是$[N_{ij}]^k\begin{pmatrix}I_1\\I_2\\\vdots\\I_l\end{pmatrix}$的第$i$項。

從此我們又可求不變行列式D了。

回到前節一開頭的例子，$f(x)=(a-x^2)/2$，不難計算出$D=1+\varepsilon_1t+\varepsilon_1\varepsilon_2t^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3t^3+\cdots$。對於$a=4$，$f^2(0)=0$，是周期爲2的疊代關係。

$$A(f^*(0))=(c_1,I_1,c_2,I_1,\cdots)$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=-1$$

$$\Rightarrow D=1-t+t^2-t^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{1+t}$$

六、結論與引申問題

數學家尋找碎形與混沌中的不變量，就如哲學家尋找生命中的意志，藝術家尋找時空中的美，宗教家尋找人類中的愛。但數學的推演是邏輯的、具體的，而非空泛的。

我們不妨以上面的兩個小例子，推至高維空間或運算子空間，再將其與數論中的Zeta函數或Eta函數連在一起，必定會有突破性的進展〔8〕,〔9〕。

參考資料

〔1〕Chin C.H., " Fractal ", *Bull. of CPS*, Vol. 11, No. 2, pp.177—183, (1989).

〔2〕Granier J. " Nietzche's Conception of Chaos ", *The New Nietzche*, Edited by Allison D.B., pp.135—141, (1977).

〔3〕Hsü K.J. and Hsü A.J.,"Fractal Geometry of Music ", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 87, pp.938—941, Feb., (1990).

〔4〕Feigenbaum M.J., " Universal Behavior in Nonlinear Systems ", *Los Alamos Science*, 1, pp. 4—27, (1981).

〔5〕Hutchinson J.E., " Fractal and Self Similarity ", *Indiana Univ. Math. Joul.*, Vol. 30, pp.713—747, (1980).

〔6〕Hu B., " Introduction to Real Space Renormalization Group Methods in Critical and Chaotic Phenomena", *Phys. Report*, 31, pp.233, (1982).

〔7〕Milnor J. and Thurstan W., " On Iterated Maps of the Interval ", Preprint, (1983).

〔8〕Chin. C.H., " On Nonabelian Zeta Function ", *Ann. Meeting of CMS*, (1985).

〔9〕Chin C.H.," Relate Eta Function to Renormalization ", *Ann. Meeting of CPS*, (1983).

—本文作者任教於交通大學電物系—