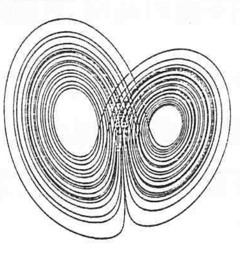


混沌與碎形

迭代(iteration)、動態系統(dynamical system)與混沌

田光復

前言一

一般來說數學都是在解方程式，如解 $x^2-5x+6=0$ 之根，或 $x^4+y^4=z^4$ 到底有多少(x,y,z)的整數解，而微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+5x=0$ 則在解函數 $x(t)$。一般說來若解不出，則討論解的分布，如是實根?負根?或都在實部爲 1/2的垂線上?（稱 Riemann Hypothesis)，或若解不出微分方程，則想斷定解最後會演變成什麼，即 $\lim_{t\to\infty} x(t)$ 的行爲如何?($t\to+\infty$ 也可改爲 $t\to-\infty$，也就是無窮的過去是怎麼樣)，一般說來一個微分方程不是跑到無窮大就是趨於某定點，間或可假定一部份的解漸趨於一週期解；這些稱爲對微分方程之動態結構之考量，例如九大行星(加太陽)的運動，也許我們的地球就是漸漸往一個標準的橢圓形(其實不應該是，一定會略有偏差)的週期解無限地近似。不管如何，求根時方程式是給定了的，解微分方程時，微分方程式也是設了出來的，至於迭代法則是對某函數 f，例如 $f(x)=4x(1-x)$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$ 等等，即把 $f(x)$ 放入 f 的 x 位置，得 $f(f(x))$，姑且命名爲 $f^{(2)}(x)$；繼之 $f^{(3)}(x)=f(f(f(x)))$，得到 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f(f\cdots(f(x)))\cdots)}_{n\text{ 個 }f}$，迭代法問 $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$ 將會如何?我們試一試上式，$f^{(2)}(x)=4f(x)(1-f(x))=4(4x(1-x))[1-4x(1-x)]=16x(1-x)(1-4x+4x^2)$ 如此複雜！那麼 $f^{(3)}(x)$? 冪次一定更高，多項式更複雜了！要問迭代無窮多次後，會怎麼樣，那不是比登天還難嗎?其實不然，首先你知道 $f(0)=0$ 取 $f^{(2)}(0)=0,\cdots,f^{(n)}(0)=0$ 故0在 f 之作用下不會被移動。而 $f(1)=0$，$f^{(2)}(1)=0$，因此1只被搬動一次，之後就不再動了。故凡事我們先解 $f(x)=x$，例如解 $4x(1-x)=x$，得 $x=0$ 及 $x=3/4$，得 $f(3/4)=3/4$ 而 $f(0)=0$ 如前，這些叫 f 之不動點(fixed point)或週期一的點，同理我們可解 $f^{(2)}(x)=x$，稱週期2的點，還有週期3,…，週期一萬的點等等，把這些點解出來，就得到 f 迭代機制的最基本動態結構，同時我們也可以問，有沒有一些點 x，在 $f(x),f^{(2)}(x),\cdots$ 之下從來就不會回來，即對某些點不存在正整數 n，$f^{(n)}(x)=x$，而此刻 x 的軌道，即 $x_0=x$，$x_1=f(x)$，$x_2=f^{(2)}(x)\cdots$，$x_n=f^{(n)}(x),\cdots$，這些點 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\cdots$ 如何跑動?會不會發散到 $\pm\infty$? 會不會逐漸靠近某個週期解?或對某兩個週期解，這些 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 先不斷

地靠近第一個週期解，又不斷地靠近第二個週期解)，因此$\{x_n\}$在兩個週期解間不斷的盪來盪去;或許會在三個週期解間，盪來盪去？嗯，甚至在n個週期解間，或者，在“所有的”週期解間飄盪不已？這樣的點及軌道有沒有？對某些f，如$f(x)=x(1-x)$，是沒有的！而$f(x)=ax(1-x)$係數變到 4.5 時則是有的(變到 4 也一樣有這些情況)，當這個情況及這種軌道發生時，我們差不多就稱f之迭代系統有混沌現象！(或f有 chaotic phenomenon)。我們精確一點說，倘若對f，有某一點x，在f之作用下其軌道$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$會稠密地分佈，無限稠密地密佈在f之定義域之某不小的範圍內；則我們顯然是無法預測它規律的行爲，我們準備稱此軌道爲引起動態系統混沌現象的軌道。

前言二

在介紹混沌的數學時，我想先說明，爲什麼要考慮迭代系統？尤其是和其他數學是如此地不同！像幾何學，它是討論固定的對象的不變性、不變量，或某曲面之曲率爲如何如何?或對某某群，能不能把所有之子群找出來。原因大致是這樣：若把f想爲一種機制或演化的規律，則在f之下，x與$f(x)$之間即彷若生物演化之父一代與子一代相關著。明白了$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$時的所有的情形，即等於是找到了在一個官能$f$下的終極模式的種種，我們不妨這樣想，倘若你把一粒質料相當均勻而形狀不論對稱與否的石頭往地上丢，令其翻滾，再拿起來丢，拿起來，再丢，…這個石子就由x_0(形狀)，變成x_1(形狀)，而x_2(形狀)，當$n\to\infty$時($n=\infty$時)，我們都認爲它是一個球不是嗎？正因爲這個構想，(丢就是f)，E. Picard 遂證明了常微分方程式$dx/dt=f(t,x)$解之存在定理。而且不管起先選的是什麼函數$h(t)$，只要滿足初值的計劃，$h(t_0)=x_0$，則無限次之積分迭代後，所得的函數$x(t)$，必爲滿足$x(t_0)=x_0$的解即$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t))$。只不過 Picard 看到的是迭代法的古典面，即千錘百鍊的迭代可得到良好的目的物(解)。而近代的動態系統的討論卻簡簡單單的挖出了許許多多在無窮迭代之後觸目可見的混沌現象！

人口問題的兩個模型：設$\triangle x$表示人口之差異則$\frac{\triangle x}{\triangle t}$即單位時間之人口變化，故$\frac{\triangle x}{\triangle t}/x$或$\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t}/x(t)$即爲人口之出生率(含死亡率)，依據馬爾薩斯之人口論此值爲常數，設爲a;自然界許多動物的繁殖規律自然要符合此一式子，只不過常數值不同罷了，常數正且大的，表示此種族生命力強，其人口增加得快。試將$\triangle t\to 0$則得微分方程$dx/dt=ax$，解之得$x(t)=x(t_0)e^{a(t-t_0)}$，故當$t\to\infty$時$x(t)\to\infty$，這當然與事實不符，故有人將人口繁殖模型改爲$dx/dt\doteq ax-bx^2$，a，b均爲正，而b遠小於a；x^2表示x的種族群聚現象的量化，$-bx^2$代表群聚現象所產生的環境汚染及傳染疾病所帶來的死亡。ax代表的是未來只要有食物，人口就能增加的繁殖力。實驗顯示這個模型對草履蟲在培養皿的繁殖記錄相當吻合，不過對溫帶之蝗蟲一代一代的數量變化卻絲毫不準，蝗蟲的“人口”是不時的跳昇，下降，很不單純，幾乎沒有規律。其緣故是這樣：在$\triangle x/\triangle t$中令$\triangle t\to 0$得常微分方程式，(稱之爲 continuous model) $dx/dt=ax-bx^2$其通解爲$x(t)=ax_0/[bx_0+(a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}]$；此解$x(t_0)=x_0$；但當$t\to\infty$時，不管$t_0$，$x_0$爲何，除非$x_0=0$。所有的解$x(t)$，$\lim_{t\to\infty}x(t)\overset{必}{=}a/b$(除了$x(t)\equiv 0$之外)，但是$\triangle t$可以趨於 0 嗎？很明顯的昆蟲是一季一季交配，有繁殖季。甚至一年才繁殖一次，故$\triangle t$不應該爲無窮小，而應爲某1個單位時間，故$\triangle x=ax-bx^2$，

故 $x_{n+1}=x_n+(ax_n-bx_n^2)$

$= (1+a)x_n - bx_n^2$,

令 $a' = 1+a$, $b' = b$

得 $x_{n+1} = a'x_n - b'x_n^2$,

故 $x_{n+1} = \dfrac{a'^2}{b'}\left[\dfrac{b'}{a'}x_n - \left(\dfrac{b'}{a'}x_n\right)^2\right]$

今令 $\dfrac{b'}{a'}x_n = t_n$,

對 $n = 1, 2, 3 \cdots$ 均如此，

則可得 $t_{n+1} = a\,t_n(1-t_n)$ 之迭代規則，稱爲離散之動態系統，此即是"前言一"中，$f(x) = 4x(1-x)$ 之較廣義的式子 $f_a(x) = ax(1-x)$。當 $a = 4.5$ 時（$a = 4$ 也一樣）迭代出來的軌道有：⑴對任意正整數 n，最小週期爲 n 之週期軌道均存在。⑵存在與任意週期軌道均無限接近，而同時又遠離且到處稠密的軌道。⑶對任一初值點 x_0^1 必在其任意小之鄰域內有另一點 x_0^2，在 f 作用之下，所產生之兩軌道最後必相離至少 1/3，且倏爾又極爲接近，其接近、遠離不斷的發生，並且與 x_0^1 與 x_0^2 之初始距離，毫無關連，並不因 x_0^1 與 x_0^2 較接近而其震盪之幅度乃變小！就是說初值的差異在 f 作用之下，軌道之間無法斷定有何馴野之別！

所以請看，同樣一個生物繁殖的問題，用常微分方程去建構其連續模型時，與用離散迭代的機制去描述時，其差異及結果是如許之大！一個是 $\lim_{t\to\infty} x(t) = a/b$ 常數；而另一個是有所有的週期的週期解，並且有擬似任一週期解且在週期解間穿梭的軌道。但我們特別應該強調，離散的模式，比較接近事實！

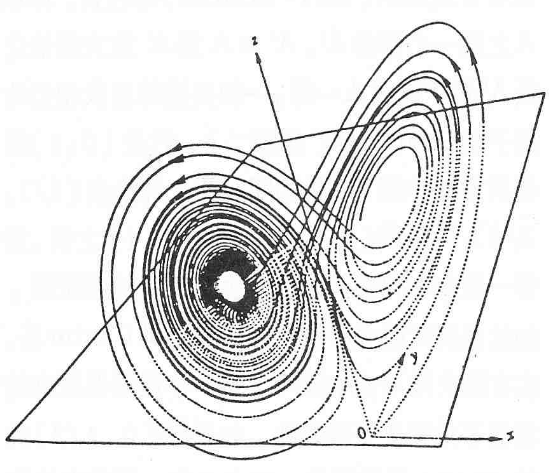
微分方程與迭代

當一個向量場或力場不隨時間而改變時，稱它是個**自守系統**（autonomous system），對系統內之任意一點（或叫狀態，state，phase）x_0，考慮此系統微分方程在 t_0 時刻解的位置在 x_0 之解 $\varphi(t, t_0, x_0)$，（對自守系統我們只需考慮 $t_0=0$ 之情況即可而不必考慮 t_0 之影響）。今令 $x_1 = \varphi(1, 0, x_0)$ 則 $x_2 = \varphi(1, 0, x_1)$ 這必也等於 $\varphi(2, 0, x_0)$，故以 φ 代表 $x \to \varphi(1, 0, x)$ 之映射，叫時差1映射，即對任意點 x 均考慮其 $\varphi(x) = \varphi(1, 0, x)$，則 $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(n, 0, x)$，而 $\varphi^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2 \cdots\cdots$ 即成原來自守系統之離散時間之觀察軌道，而非系統中 x 點之整個 t-軌道了！這看似遺漏許多時間但好處是它是離散的，可用迭代之觀念探討系統之動態結構，雖然與原本的微分方程之解，全貌會有些偏差，但差異不會太大。下面我們介紹 Lorenz-equation，（它是一個自守系統）與 Chaos。

如果要定義 Chaos，我們已經描述過了，就是 $f(x) = 4.5x(1-x)$ 會有的三個性質，這些都可以數學地證明出來。至於 Lorenz-equation，及其所謂的蝴蝶效應（butterfly effect）則是一篇有不明確的故事的小說，E. Lorenz 在1963年發表了一篇文章，討論微分方程系統：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -xz + \gamma x - y \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

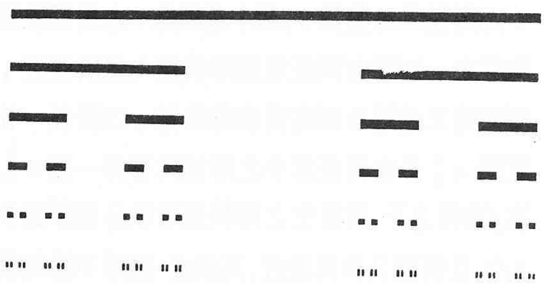
其中 σ，γ，b 均爲待變動之參數。這組方程原是由大氣對流之偏微分方程簡化過來的，x 代



圖一 Lorenz 方程解之數值軌道

初始值爲 (0,0,0.001)，$\sigma=10$，$\gamma=28$，$b=8/3$。

表對流運動，y爲水平方向的溫度變化，z代表鉛垂方向的溫度變化，結果在$\sigma=10$，$r=28$，$b=8/3$時，Lorenz 方程之數値模擬解呈現了前所未有的現象，如圖一，圖一乃是解在三度空間中的模樣。我們看到(1)解（數値解）在左方盤繞，愈繞愈近中心的小圓圈，可是最後並不收斂到一個點或一個圈而是離開了最小的圈，跑向右方，在右方時又像從前在左方一樣不斷的盤繞，最後又離開了右方之最小圈，又往左方去了並且做與以前一樣的盤繞；如此不斷的又左又右繞來繞去，永遠沒有了結的時候。(2)倘若取2個初値，十分十分地靠近，則兩軌道起先十分相近，設令一爲紅軌，另一爲藍軌，則紅藍起先可謂同步，然而到後來紅軌還在左邊時，藍軌則走往右邊，有時兩者又相亦步亦驅地同步，不久又分道揚鑣，(3)初値不管取那一點只要$|x|\leq 1$，$|y|\leq 1$，$|z|\leq 1$，且不要$x=y=z=0$，則其軌道的模樣，盤繞的方式，完全一樣。這裏面有什麼機關，到現在還無人解知，有人猜測裡面有一奇異的吸引子(strange attractor)，很可能是有一個碎形集(fractal)Λ，此Λ在系統下是不變的，即取任意一點$(x_0, y_0, z_0)\in\Lambda$，考慮在$t_0$時刻爲$(x_0, y_0, z_0)$的解，則解仍停留在$\Lambda$內。故$\Lambda$內極可能有許多週期解，甚至還有稠密地貫穿$\Lambda$集合的軌道，且$\Lambda$每一部份皆具有自我相似(self- similar)的性質，即取Λ之某一小部份Λ'，$\Lambda'\in\Lambda$ 將Λ'放大數倍之後Λ'幾乎就與Λ一樣。一個典型的自我相似的例子是Cantor集（見圖二），它是〔0，1〕這線段除去中間1/3長的開區間，即除去(1/3，2/3)，得兩段〔0，1/3〕∪〔2/3，1〕之後，對每一段由中間對稱地再除去1/9長的開區間，如此無窮次除去中段所得的集合叫Cantor集。在有限次地取走中段時，每一小段都與原來的相像不是嗎？不僅如此，如果將〔0，1/3〕內的Cantor集的圖像，放大3倍，則放大後的Cantor子集與原來的Cantor集同構。這叫自我相似。附帶說明，“像這樣的”（見註）一維的Cantor集Λ，在前言之人口繁殖離散模型中，是$f(x)=4.5x(1-x)$之不變集，即$f(\Lambda)=\Lambda$，S. Smale在1963不但做出了$f(\Lambda)=\Lambda$，並且證明了f與Bernoulli左移運動σ同構，即將Λ中的點x均以0. $a_1\ a_2\ a_3$……（以3爲底）無窮小數表示時，其中a_i非0即2，原因是(1/3，2/3)，(1/9，2/9)，…，$(1/3^n, 2/3^n)$均已去掉之故，$f(x)=$？Smale 證明了是$0.a_2a_3a_4\cdots$即將小數右移一位除去整數部份a_1即得。果眞如此則f的迭代性質將可簡單的被完全的了解了！例如$x=0.2002002\cdots\cdots$一定是週期3的點，而所有的週期點均可人工地造出來，而你若把所有週期，所有不同循環小數的片段（如上述之200乃其中之一），不斷的一個一個接好成一個點x^*，由於每一片段都是0，2的組合，合起來還是0，2的組合，故x^*還是在Λ中，但$\{\sigma^n(x^*)\}_{n=1}^{\infty}$則成爲在$\Lambda$中到處稠密的軌道了。這是Cantor集與人口離散模型的動態系統的關係，但是對(1/3，2/3)中的點在f之作用下如何了？首先它們被映至〔1，9/8〕而此段在f下又映至負數，而$x<0$時，令$n\to\infty$ $f^{(n)}(x)\to-\infty$，這就是說，在f之作用下，Λ排斥“非Λ的點”至$-\infty$處，但在Lorenz system 中若有Λ的



圖二 CANTOR集: 它是由〔0，1〕線段除去中間$\frac{1}{3}$長的開區間，得〔0，$\frac{1}{3}$〕∪〔$\frac{2}{3}$，1〕之後，對每一段由中間對稱地再除去$\frac{1}{9}$長的開區間，如此無窮次除去中段所得的集合。

話（是二維的Λ），Λ對附近非Λ的點，卻是非排斥的，極可能是又排斥又吸引的，這是兩者不同之處，（由數值圖像顯示任一解曲線不但被吸引且又被排斥了的，不是嗎？而在$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，$|z|\leqslant 1$內的點其解並未跑到無窮遠處，不是嗎？）人們揣測Lorenz system有二維的，像Cantor set一樣具自我相似的集合Λ，在時差映射1下Λ還留在Λ內，並且對Λ之外，尤其對外緣之外的點有吸引性。

以上我們介紹了離散的動態系統的迭代軌道之混沌的數學結構（包含定義混沌），並且把它用到揣測Lorenz - system的奇特數值模擬軌道忽左忽右的現象。這兩者之間（即離散的混沌與微分方程系統的混沌）是有關連的，人們才會用第一種混沌去解釋第二種混沌。關連所在是所謂的Poincaré映射。我們實在該在這兒提到首先想到混沌現象的祖師爺Poincaré！由於他是上世紀的偉大人物，今天，尤其物理學家似乎在談到CHAOS時都把他置諸腦後，實則當他發現了微分方程系統有同宿軌互交之情況時，（即有 transversal homoclinic orbit，他本人指的是限制性的三體問題，或一些非線性的微分方程系統，或一些Hamiltonian System）其軌道之複雜，他說只有上帝才會明瞭是怎麼一回事！

許多物理學家都認為混沌現象的考慮是如此重要，以致於有人稱(1)相對論學說(2)量子效應(3)混沌現象，為物理學三個最重要的發現，而混沌現象的發現都是物理學家M. Feigenbaum 1978年的文章惹出來的。也許我們下次再介紹Feigenbaum sequence與Sarkovskii定理的關係，一個是計算機的實驗（Feigenbaum），另一個純粹是數學的定理（Sarkovskii）！而它們互相證驗得如許的好，實令人嘆為觀止。Feigenbaum分析的是$f_\mu(x)=1-\mu x^2$，當μ變化時f_μ迭代的動態結構的變化。但$f_\mu(x)=1-\mu x^2$與$F_a(x)=ax(1-x)$圖形一樣！都是拋物線，只不過略加平移而已。故根本就是人口繁殖的離散模型的動態結構，怎麼物理學家也搞起蝗蟲的繁殖問題來了?是數學的緣故吧！

註：圖二中標準的CANTOR集與$f_{4.5}(x)=4.5x(1-x)$中之Λ並非完全一樣。只是“符號表示”（symbolic representation）一樣而已。關於Λ之拓樸結構請看 R. Devaney之 Introduction to Chaotic dynamical system，或進一步參看 S. Wiggins之Global bifurcations & Chaos.

——本文作者任教於台灣大學數學系——