

# 蝴蝶效應

全任重

當人們遇到複雜的現象時，常常懷疑它一定由複雜的因素所產生的。傳統的物理智慧告訴大家：大自然的一切都遵循完美的規律而演化，至於那些不守規矩、雜亂無章的現象統統安裝個『噪音』或『誤差』之類的名詞來作交待就好了。1963年氣象學家 Edward N. Lorenz 在『大氣科學期刊』裡所討論的微分方程組

$$\begin{aligned} dx/dt &= 10(y-x) \\ dy/dt &= -xz + 28x - y \\ dz/dt &= xy - (8/3)z \end{aligned}$$

改變了人們對複雜現象之生成因素的構想。對於這組微分方程，不同的初始值代表不同的輸入，而滿足

$$x(0)=x_0, y(0)=y_0, z(0)=z_0$$

的解  $\{x(t), y(t), z(t)\}$  可視為  $\{x_0, y_0, z_0\}$  的輸出。Lorenz 注意到：每當初始值作極微小的變化時，對應的微分方程解卻會改變得很厲害。他於是把對於初始值如此敏感的現象比喻為蝴蝶效應 (Butterfly Effect)：一隻正在巴西飛舞的蝴蝶對空氣的影響可發展成下個月侵襲菲律賓的颱風！（氣象局的長期間天氣預告的準確率甚低，蝴蝶效應豈不是個蠻有學問的藉口嗎？）Lorenz 的觀察告訴大家：『複雜的現象』不一定是由『複雜的因素』變化而成，而有可能透過極簡單的數學模式

來瞭解。

Lorenz 所考慮的是『非線性』微分方程組，意思是說：變數  $x, y, z$  的導函數  $dx/dt, dy/dt, dz/dt$  不完全與  $x, y, z$  成比例。一般的微分方程教科書裡都告訴我們如何去解『線性』微分方程組。至於『非線性』微分方程組就不像線性方程那樣可以使用微積分和線性代數的方法把精確解求出。這時唯有使用數值方法方可估計解的近似值。依照 Euler 方法，若  $\{x(t), y(t), z(t)\}$  為 Lorenz 微分方程組之解，則位於結點  $t = nh (n=0, 1, 2, \dots)$  之值  $\{x_n, y_n, z_n\}$  可由遞迴關係

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 10(y_n - x_n)h \\ y_{n+1} &= y_n + [-x_n z_n + 28x_n - y_n]h \\ z_{n+1} &= z_n + [x_n y_n - \frac{8}{3}z_n]h \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

來逼近。將微分方程由此轉變為遞迴關係之後，剩餘的工作可由計算機代勞。

1961年的冬天 Lorenz 面對著一台看來就像整箱由真空管、電線組合而成的 Royal Me-Bee 牌『計算機』。那台機器霸佔了幾乎整間實驗室，每次開機關機時真空管的燈絲總有些要被燒掉。因此每天早上的第一件工作是花上足足一個鐘頭去檢查有那些真空管是壞的！為

了要將方程解的數據資料用圖形表示，Lorenz 必須使用文字符號來瞄點。一大片『a』來來往往的佈滿整捲報表紙洋洋大觀的情景可想而知。無怪乎當他發現鄰近的初始值居然會跑出極不相同的解時的第一反應是：看看是否又有真空管被燒壞。當時的圖形表示的方法雖然很原始，卻足以判斷兩個解差異頗為巨大。

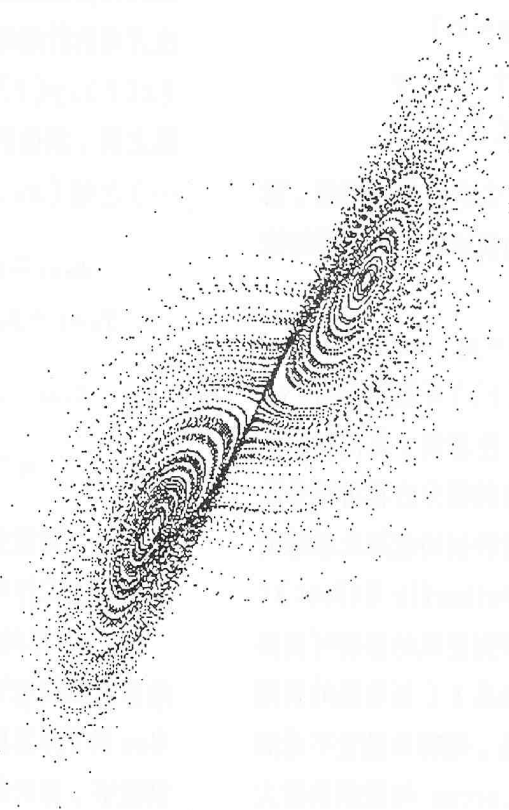
1991 年的現在我們可以使用個人電腦來重覆 Lorenz 的數學實驗。在 Turbo Basic 下只需執行如

```
screen 2
window(-40,-30)-(40,30)
cls
f=8/3:x=6:y=1:z=4:h=.01
while not instat
x1=x+h*10*(y-x)
y1=y+h*(-x*z+28*x-y)
z1=z+h*(x*y-f*z)
x=x1:y=y1:z=z1
pset(x,y)
wend
```

的程式就能將『Lorenz 吸引者』看個飽。

若將以上的程式增加一小段，各位就能體會到蝴蝶效應的意思： $z$  坐標相差整個畫面千萬分之一長度的兩個初始值經過一段時間後會跑出極不相同的路徑。

```
screen 12
window(-40,-30)-(40,30)
cls
f=8/3:x=.6:y=.6:z=.6:h=.001
nx=.6:ny=.6:nz=.6000001
while not instat
x1=x+h*10*(y-x)
y1=y+h*(-x*z+28*x-y)
z1=z+h*(x*y-f*z)
x=x1:y=y1:z=z1
pset(x,y),13
nx1=nx+h*10*(ny-nx)
ny1=ny+h*(-nx*nz+28*nx-ny)
nz1=nz+h*(nx*ny-f*nz)
nx=nx1:ny=ny1:nz=nz1
pset(nx,ny),10
wend
```



如果手邊只有試算表，你照樣可把以上圖形現於螢幕上。其過程如下：

(1)將初始值 6, 1, 4 分別鍵入第一列；

C1: 4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	1	4					
2								
3								
4								
5								
6								

SHEET

(2)輸入式子  $+A1+0.1*(B1-A1)$  於 A2；

A2:  $+A1+0.1*(B1-A1)$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	1	4					
2	5.5							
3								
4								
5								
6								
7								

SHEET

(3)輸入式子  $+B1+0.01*(-A1*C1+28*A1-B1)$  於 B2；

B2:  $+B1+0.01*(-A1*C1+28*A1-B1)$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	1	4					
2	5.5	2.43						
3								
4								
5								
6								
7								

SHEET

(4)輸入式子  $+C1+0.01*(A1*B1-8/3*C1)$  於 C2；

C2:  $+C1+0.01*(A1*B1-8/3*C1)$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	1	4					
2	5.5	2.43	3.953333					
3								
4								
5								
6								
7								

SHEET

(5)把式子由 A2 .. C2 抄至 (COPY) A2 .. C5000；

A3: +A2+0.01\*10\*(B2-A2)

SHEET

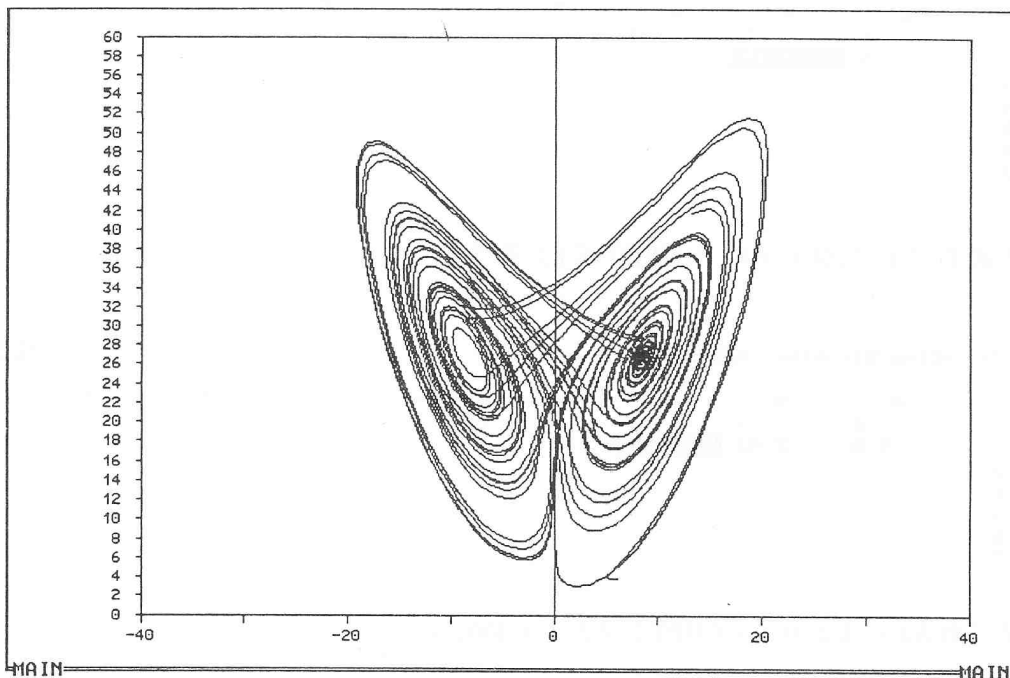
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	6	1	4					
2	5.5	2.43	3.953333					
3	5.193	3.728266	3.981561					
4	5.046526	4.938261	4.068995					
5	5.035700	6.096563	4.209699					
6	5.141786	7.233606	4.404445					
7	5.350968	8.374503	4.658929					
8	5.653321	9.539731	4.982808					
9	6.041962	10.74556	5.389245					
10	6.512323	12.00424	5.894775					
11	7.061515	13.32376	6.519337					
12	7.687741	14.70739	7.286348					
13	8.389706	16.15272	8.222711					
14	9.166008	17.65045	9.358606					
15	10.01445	19.18262	10.72688					
16	10.93127	20.72060	12.36187					
17	11.91020	22.22284	14.29724					
18	12.94146	23.63264	16.56277					
19	14.01058	24.87646	19.17951					
20	15.09717	25.86350	22.15339					
21	16.17380	26.48753	25.46729					
22	17.20518	26.63229	29.07221					
23	18.14789	26.18149	32.87908					
24	18.95125	25.03423	36.75370					
25	19.55955	23.12495	40.51790					
26	19.91609	20.44525	43.96056					
27	19.96900	17.06208	46.86017					
28	19.67831	13.12527	49.01770					
29	19.02301	8.858091	50.29339					

MAIN

29-Jun-91 05:56 PM

(6)以A行的數據為x坐標，C行的數據為y坐標將圖形畫出。記得選擇『XY』為繪圖 type，並且只畫線不畫點。可將坐標範圍設定於長方形  $[-40, 40] \times [0, 60]$  內。

MENU



Graph Preview

這是  $x-z$  平面上的投影，看來與前一幅  $x-y$  平面上的投影是不是很不一樣？這個奇怪的三維空間曲線必須從不同的角度去看它方能體會到其混亂、複雜、美妙的姿態。我們可以執行以下的 Turbo Basic 程式來沿著任何方向觀看 Lorenz 吸引者。使用者可使用『上、下、左、右』和 F1、F2 等鍵來控制圖形的旋轉方向。

```

key(11) on:key(12) on:key(13) on
key(14) on:key(1) on:key(2) on
screen 9
ss=10000:f=8/3:x=6:y=1:z=4
h=.01:d=.1:p=1:s=1:t=1
window(-40,-30)-(40,30)
cls
dim x(ss),y(ss),z(ss)
for i=1 to ss
x1=x+h*10*(y-x)
y1=y+h*(-x*z+28*x-y)
z1=z+h*(x*y-f*z)
x=x1:y=y1:z=z1
x(i)=x:y(i)=y:z(i)=z
i=i+1
next i

xx:
if inkey$=chr$(32) then end
on key(11) gosub xzp:
on key(14) gosub xzm:
on key(12) gosub yxp:
on key(13) gosub yxm:
on key(1) gosub zyp:
on key(2) gosub zym:
th=d*t
screen,,p,q:swap p,q:cls
for i=1 to ss
x=x(i):y=y(i):z=z(i)
select case s
case 1
x1=x*cos(th)+z*sin(th)
z1=-x*sin(th)+z*cos(th)
y1=y
case 2
y1=y*cos(th)+x*sin(th)
x1=-y*sin(th)+x*cos(th)
z1=z
case else
z1=z*cos(th)+y*sin(th)
y1=-z*sin(th)+y*cos(th)
x1=x
end select
x(i)=x1:y(i)=y1:z(i)=z1
pset(x1,y1)
next i
goto xx:

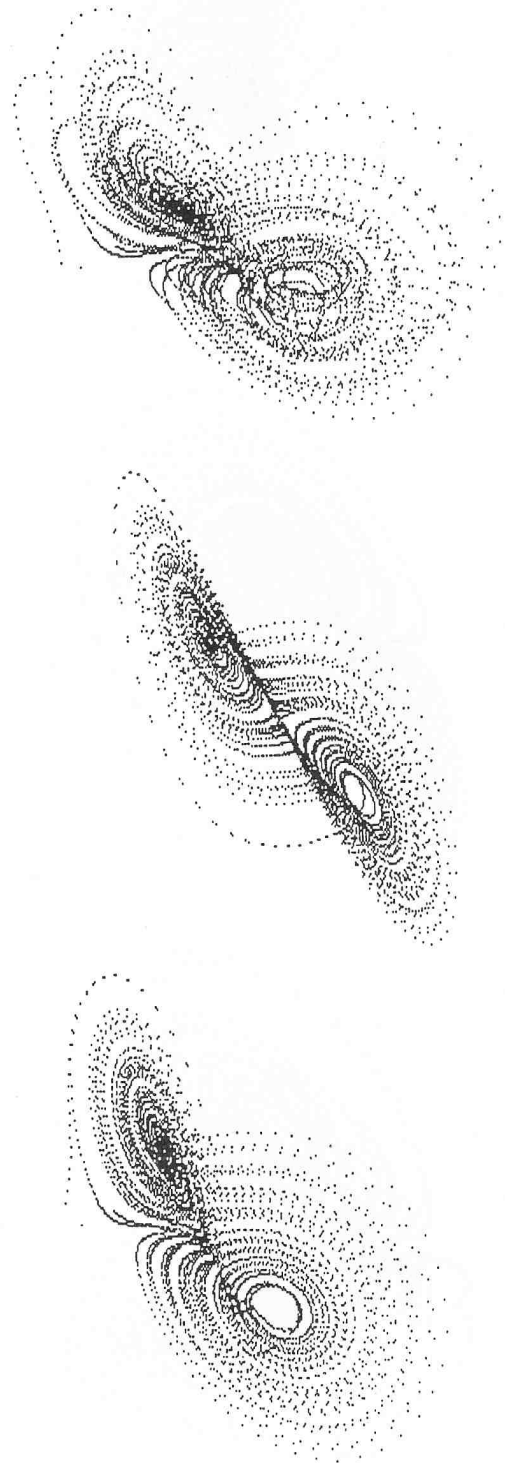
xzp:
s=1:t=1:return

```

```

xzm:
s=1:t=-1:return
yxp:
s=2:t=1:return
yxm:
s=2:t=-1:return
zyp:
s=3:t=1:return
zym:
s=3:t=-1:return

```



計算機是研究非線性微分方程的重要工具，由以上所討論的 Lorenz 的蝴蝶效應可以體會這點。

### 參考文獻

J. Gleick, Chaos: making a new science, Penguin, 1987。

—本文作者任教於清華大學數學系—

更正：

第十五卷第二期「橋牌和離散數學」  
第 7 頁右欄下公式更正為：

$$Prob(E|D) = \frac{\sum_{s \in E} Prob(D|s)}{\sum_s Prob(D|s)}$$