高中排列組合機率的診斷教學

李政豐

壹：前言

在十幾年的教學經驗裏，我發現一件有趣的事：有部份高一數學學得不錯的學生，到高二學排列組合機率時，卻很吃力；也有部份學生高一學得很不理想，到學這個章節時反而茅塞頓開，進步神速。撇開其他因素不談（如高二突然變得用功或不用功），我們認爲這是因爲排列組合機率的學習，更著重在分析、理解和思考能力之訓練；不是光靠記誦就能解題。在學這個章節時，有一部份同學幾乎是「在掙扎中理解觀念」可是到期末考終於破繭而出。另一部份同學恰好相反；是在「理所當然、不假思索」中接受了排列組合的觀念，等到期末考面臨綜合性試題（排列、組合、機率等觀念一起用上）卻一點招架的能力也沒有。

仔細檢討其原因，我們發現課本和坊間參考書的課程設計，較偏重在教學目標的達成，因而預設太多針對單元目標（例如重複組合、環狀排列）的題目類型，和簡潔漂亮的解題技巧。可是卻「缺乏讓學生自由發揮他個人思考方式的空間，學生更不容易發現或探究自己錯誤所在。」常擅自揣摩而沒有自信。有時對的莫名其妙，有時錯得離譜而不自知。學生在課堂上認同老師的算法是對的，但類似題目要學生單獨解題時，卻不知如何下手。

此外，課本較偏向於教學目標縱向的研究，忽略了橫向的發展（例如：重複排列與重複組合之關係、分堆和重複組合的關係），因而學生在綜合性試題中，不能大膽的多用一些方法，自由靈活的放手去解題。

貳：本文

「過程模式」的課程發展概念，好像特別能適合於排列組合與機率的教學性質，並能產生顯著的效果，我們把它說明如下：

(一)它不斷修正教學目標和方法，以具有創意的教學經驗，配合能啓發思考的學習發展過程，並鼓勵同學自由而率性的解題。並藉著評量與分析，在課堂上不斷的製造「認知衝突」，引起學生解決問題、瞭解眞象的動機。然後由發現、探究、導致對問題眞正的認知發展。

(二)它著重在學生如何學習，而不只是教師要如何去教；在學生沒有達成「眞正理解」、解決「認知衝突」之前，過份強調解題技巧，對學習者而言，是本末倒置的做法。因此要確實掌握學生的學習情況，而教師扮演共同學習的角色，使學生能試驗、修正、擴展並建立他

所發現的數學理念。

㈢它重視非形式化的學習環境；鼓勵自由而開放的討論並視討論爲解決問題的重要途徑。因爲數學不像社會科學或文學，答案有相當程度的彈性。在條件充分、題意清楚的情況下，數學的解答通常是唯一的。而在自由辯論中，常能經由大家所認同的最好解法來獲致這個唯一的解答。

我們嘗試以「過程模式」的課程發展概念，在教完排列組合及機率之後、期末考之前，實施評鑑。整理（或由學生來表決）出七項「認知衝突」比較嚴重的問題。我們把本校二年級三個班145名學生的詳細作答情形及診斷教學的內容，記述於下提供高中老師和同學作參考。

〈1〉有關分堆的概念

題目A：把5個相同的白球分裝在3個外表一樣的袋子中（可以是空袋，如3，2，0）且每袋球數不限，則共有幾種方法？

作答情形：1.有47.6%能算出正確答案：5種方法。

2.有47.6%答錯。

3.其餘空白未作答。

題目B：把5個不同類的水果，分裝在3個外表完全相同的箱子中（可以是空箱，如5，0，0）每箱水果數不限，則有幾種方法？

作答情形：1.有14.4%算出正確答案：41種方法。

2.有73.8%答錯。

*a.*其中有9.6%算得21（用重複組合計算）。

b. 如果3箱水果數是3，1，1時有$C^5_3\times C^2_1\times C^1_1\times\dfrac{1}{2!}=10$，10種方法，而同學沒除2!者佔18%。

§**診斷教學**：分堆，在高三普通數學中用分組這個名詞，但是它與物理實驗的分組（第一組、第二組…）有點不同。因爲物理實驗它有組別，與「箱子不同的分箱算法」一樣。但分堆的計算應與「箱子都一樣時的分箱」或「沒有組別時的分組」相同。由於分堆、分組的定義語焉不詳，課本也沒說明；只有高三普數下册的例題「淘汰賽賽程的安排」和習題當中用到它，因此高二學生有清楚概念的實在不多。

我們先嘗試爲分堆下個定義：

1.把n個相同物品分成K堆：只要把n分成K個由大而小的非負整數和，算是一種分堆方法。

2.把n個不同東西分成K堆：

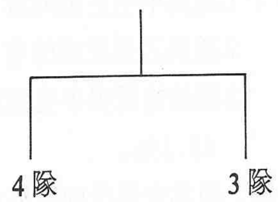
①如果各堆數目皆不同，則各堆之間要考慮順序，視同排列；堆內成員不考慮順序視同組合來計算。

②各堆數目如有相同，則相同數目的幾堆之間不考慮其順序。只有在堆內成員有變化時才算是不同的分堆方法。

〔題目A〕是相同物的分堆；〔題目B〕是不同物的分堆。解法也就相當清楚了。我們再舉個例題來應用：

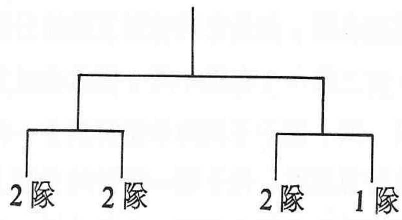
題目C：高二有7個班：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚。參加排球單淘汰賽，問賽程有幾種安排方法？

解答：這是不同物的分堆情形，先把7分成二個連續整數和（數目不同的二堆），偶數則分成兩個相同整數和（數目相同的二堆）如圖㈠，有$C^7_4\times C^3_3=35$種方法（4，3兩組間要



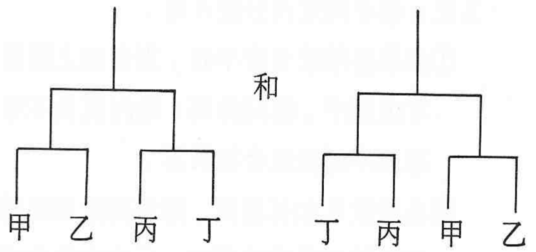
圖㈠

考慮順序），再用相同方法續分下去（這樣可保證第二輪之後，都是2的次方）如圖㈡



圖(二)

$$\frac{C_2^4\times C_2^2}{2!}\times(C_2^3\times C_1^1)=9$$ ，（2，2數目相同，組間不考慮順序，因爲賽程相同）例如圖(三)是相同的賽程（他們的對手不變）所以共有 $35\times9=315$ 種賽程安排。



圖(三)

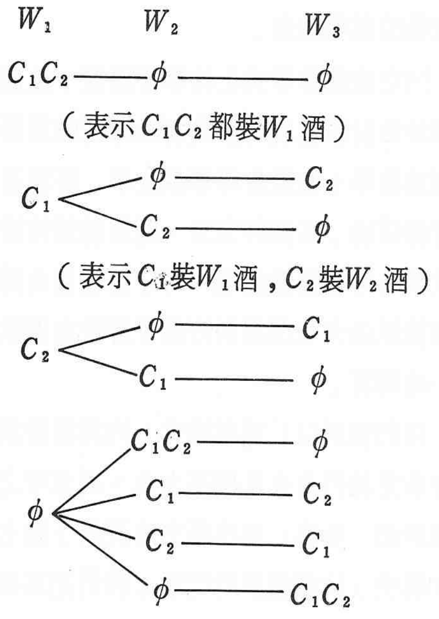
〈2〉重複排列和樹狀圖分解的關係

題目D：有兩個不同的酒杯，三種不同的酒。如果每杯恰倒一種酒，則有幾種不同的倒法？

解答：甲生的答案是 $2^3=8$，乙生的答案是 $3^2=9$。您認爲誰的答案正確？並說明另一個答案錯的原因。

作答情形：1.認爲甲生正確的有 30.3%。
2.認爲乙生正確的有 67.6%。
3.能清楚說明甲生錯誤的有 15.2%。

§**診斷教學**：因爲大部份同學根本不知道重複排列所謂的一種方法是如何；因此有84.8%不知道甲生錯誤在那裏？所以我們改用樹狀圖來說明甲生的錯誤：當酒 W_1，W_2，W_3 倒入杯子 C_1，C_2 時如圖(四)。



圖(四)

它也是 9 種方法，其實 W_1 酒倒在杯子裏就有 4 種情形。

〈3〉重複組合、重複排列、分堆與外部排列內部組合的關係：

題目E：有 6 位新老師要分發到 3 所國小任教，如果每位老師在分發時，可任意選擇學校，則每所國小恰分發二位老師的機率是多少?

作答情形：1.有 38.6%能算得正確答案 10/81。
2.有 3.5%的答案是 90。
3.有 56.6%的學生答錯。

註：$C_2^6\times C_2^4\times C_2^2=90$ 的算法，由於學校不同，視同排列；校內的二位老師則不計較順序，視同組合。我們姑且稱它是「外部排列，內部組合」。

題目F：渡船三艘，每艘最多可載 5 人，如果有 7 人同時過渡，每人上三艘船的機會都相等，則安全過渡的機率是多少？

作答情形：1.有 16.6%能算出正確答案：$\frac{238}{243}$。
2.有 6.9%的答案是 2142〔只算出安全過度的方法 3^7-3

$\times C_7^7-3!\times(C_6^7\times C_1^1\times C_0^0)=$ 2142 〕。

3.有 59.3%答錯(不含寫2142的)。

§**診斷教學**：約有60%的同學未曾分析過：

1.相同物分堆再排列，等於重複組合。

2.重複組合→外部排列內部組合，等於重複排列。

3.相同物分堆→排列→外部排列內部組合，等於重複排列。

因而學生在題目E、F中不知道用重複排列數當分母來算機率。於是我們舉例來說明，祈使同學有清楚的概念。

題目G：有4枝相同的鉛筆，要分給3個小朋友（有人可以不得），筆要分完，則有幾種分法？

解答：

相同物分堆（決定各堆鉛筆數目）	排列（三堆鉛筆分給3位小朋友）
$4=4+0+0$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$
$=3+1+0$	$\longrightarrow 3!=6$
$=2+2+0$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$
$=2+1+1$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$

總共有$H_4^3=15$種方法

題目H：有4位老師要分發到3所國小任教，每所國小所分發的教師不限，有幾種方法?

解答：

相同的分堆	排　列	外部排列內部組合
$4=4+0+0$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$	$\longrightarrow 3\times C_4^4\times C_0^0\times C_0^0=3$
$=3+1+0$	$\longrightarrow 3!=6$	$\longrightarrow 6\times C_3^4\times C_1^1\times C_0^0=24$
$=2+2+0$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$	$\longrightarrow 3\times C_2^4\times C_2^2\times C_0^0=18$
$=2+1+1$	$\longrightarrow \frac{3!}{2!}=3$	$\longrightarrow 3\times C_2^4\times C_1^2\times C_1^1=36$

因此共有$3+24+18+36=81=3^4$種分發方法。

〈4〉Laplace機率定義的概念，與重複組合的關係

題目I：有5個外表相同的球，全部放入3個不同的箱子中，每球放入3個箱子的機會均等，求兩箱有兩球，另一箱有一球的機率？

解答：某生答案是$P=\frac{3}{H_5^3}=\frac{3}{C_5^7}=\frac{1}{7}$，

你認爲對嗎?如果你認爲不對,請寫出你的答案。

作答情形：1.有 48.2%認爲不對。

2.只有 19.6%能算出正確答案$\frac{10}{27}$。

3.有 46.9%認爲$\frac{1}{7}$是對的。

4.有2%的答案是$\frac{3}{3^5}$(分母用重複排列,分子用重複組合)。

§**診斷教學**：約一半的學生忽視Laplace機率定義的特點：「在樣本空間S的每個樣本點發生的機率均等的條件下，A事件發生的機率$P(A)$才可以用$\frac{n(A)}{n(S)}$來計算。」在計算機率時，每一球放入3個箱子的機會均等，不管球有沒有相同，箱子有沒有一樣，我們都應該把它們視爲不同；才能滿足Laplace機率定義的要求。因此我們要使同學認清楚：

甲箱	乙箱	丙箱
2球	2球	1球

的機率爲$\frac{C_2^5\times C_2^3\times C_1^1}{3^5}=\frac{30}{243}$。

甲箱	乙箱	丙箱
4球	1球	0球

的機率是$\frac{C_4^5\times C_1^1\times C_0^0}{3^5}=\frac{5}{243}$。

同樣是重複組合的一種情形，但二者機率並不相等；至於在什麼樣的條件下，重複組合的每一種情形，機率才會相等？我們實在也找不出一個很自然、且常被用到的例子。

〈5〉環狀排列的概念

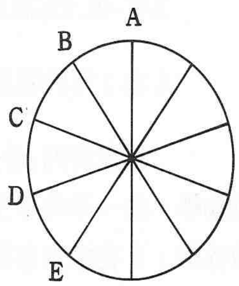
題目J：有10位客人，圍一張圓桌吃飯；圓桌座位分別貼有1～10的編號，則入座方法有幾種？

作答情形：1.有26.8%寫出正確答案10！＝3628800。

2.有69.0%的答案是9！。

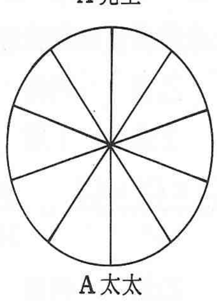
題目K：有5對夫婦A、B、C、D、E圍一圓桌而坐，夫婦要相對，問方法有幾種？

解答：某甲先把5個字母作環狀排列，再讓每對夫婦入座，故有$5!/5\times 2^5=768$種，如圖(五)。某乙先使A先生坐定一個座位，A太太



圖(五)

只好坐在他的對面，B先生剩下8個選擇，B太太也只有一個選擇…由乘法原理共有$1\times1\times8\times1\times6\times1\times4\times1\times2\times1=384$種，如圖(六)。



圖(六)

你認爲那一個人的答案正確？爲什麼另一個是錯的？請說明理由。

作答情形：1.有6.9%認爲甲生正確。

2.有89.7%認爲乙生正確。

3.只有31.2%能說明甲生算錯的原因。

§**診斷教學**：多數學生養成一個壞習慣：看到圍圓桌而坐，馬上用環狀排列來計算；老師就應格外小心，說明清楚環狀排列的定義：

1.一群人圍圓桌而坐，或圍圓圈跳土風舞，如果只管相關位置，而不計較實際位置，才可用環狀排列來計算。

2.在計算環狀排列數時，如果令某甲坐定一個實際位置，其餘位置已變成某甲的左手邊第幾位，或右手邊第幾位；應計較實際位置，因此其他人入座要用直線排列來計算。（因爲一旦圍成圓圈手拉手跳土風舞，相關位置就已確定，旋轉仍可看成是同一種環狀排列）。

在〔題目K〕中，眞正瞭解某甲重複計數的不多，老師尤應說明學生在那一個觀念，走錯了路。

〈6〉重複計數或少算的錯誤：

題目L：男生5人，女生6人，要從這11人中挑4位同學組成4人小組，則其中至少有男生2人的情形有幾種？

解答：某生算法如下：先由男生5人中挑出2人，再由剩下的9名男女中挑2人配合，故有$C^5_2\times C^9_2=360$種方法。

你認爲上述算法正確嗎？如果不正確，你的答案是多少？

作答情形：1.認爲360種是正確的有35.2%。

2.認爲不正確的佔58.6%。

3.認爲不正確，且算出正確答案是215種的佔28.9%。

題目M：把9本相同的筆記本，全部分給甲、乙、丙3人

①如果甲至少得一本，乙至少得2本，丙至少得3本，求分法有幾種？

②如果甲乙丙3人，其中一人至少得1本，1人至少得2本，另一人至少得3本，問分法有幾種？

作答情形：1.有53.8%能算得①的正確答案10。

2.有20%能算得②的正確答案25。

3.有30.9%把(2)的答案算成60種（$10\times3!$）。

題目N：英文書7本、中文書8本，皆不相同，如果取2本英文書、3本中文書，共5本書作排列，則有幾種情況？

解：某生答案是$P^7_2\times P^8_3=14112$，你認爲這個算法對嗎？如果你認爲不對，請寫出你的答案和理由。

作答情形：1.有17.2%認爲是對的。

2.有79.2%認爲不對。

3.有56.6%能算出正確答案$(C^7_2\times C^8_3)\times5!=141120$並解釋原因。

§**診斷教學**：在〔題目L〕中如果令男生5人，女生6人分別是男$_1$男$_2$男$_3$男$_4$男$_5$，女$_1$女$_2$女$_3$女$_4$女$_5$女$_6$，則$C^5_2\times C^9_3$中把{男$_1$男$_2$}+{男$_3$男$_4$女$_1$}和{男$_3$男$_4$}+{男$_1$男$_2$女$_1$}看成是不同的二種情形，因而造成重複計數。

在〔題目M〕中，老師一定要舉實例，如（3，3，3）在甲至少1，乙至少2，丙至少3已算一次，在甲至少得1，乙至少3，丙至少2又再重複算一次…前後共算了6次。

在〔題目N〕中老師必須說明$P^7_2\times P^8_3$只是〔$(C^7_2\times C^8_3\times5!)$〕當中$\frac{5!}{2!3!}=10$種情形裏的一種而已。

〈7〉大數法則：

題目O：丟一個公正銅板10次，每次投得正面或投反面的機率均等，問恰投得5次正面，5次反面的機率是多少？

作答情形：1.有13.8%的答案是$\frac{1}{2}$。

2.有13.1%的答案是$\frac{1}{1024}$。

3.有41.4%能寫出正確答案$\frac{63}{256}$。

4.有26.9%是其他答案。

§**診斷教學**：大數法則的說明只有在第四冊P.95「理論機率與模擬試驗機率可能會有所不同，但模擬次數增加，其誤差必然會減少，這一事實稱之爲大數法則。」我們覺得，它的份量太輕，學生往往忽略它的重要性。在〔題目O〕中，有的不會由$C^{10}_5(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^5$來算，有的把投10次銅板中，正、反的期望次數都是5次，誤推得恰好5正5反的機率是½。因此老師在教學時必須補充「投一枚硬幣出現正面，反面的機率都是½」與「投一枚硬幣10次，出現正面5次、反面5次的機率是$C^{10}_5/2^{10}$」的關係。我們嘗試用下列方式來說明：

1.甲投一枚公正硬幣10次，其中出現正面n_1次。

乙投一枚公正硬幣100次，其中出現正面n_2次。

丙投一枚公正硬幣1000次，其中出現正面n_3次。

丁投一枚公正硬幣10000次，其中出現正面n_4次。

則通常$n_4/10000$會最接近1/2，其次是$n_3/1000$，再其次是$n_2/100$，最後才是$n_1/10$，但這不是絕對的。（有可能$n_1=5$而$n_1/10=1/2$；反而是最接近1/2的機率）當投擲次數愈多時，出現正面的機率就會愈接近理論的機率1/2，我們稱之爲大數法則。至於投一枚銅板10次，出現恰好5正5反之機率，就是把5個正5個反作不完全相異物排列$10!/5!5!=C^{10}_5$，每一種排列的機率都是$1/2^{10}$，因此得到$C^{10}_5/2^{10}$的答案。

叁：結語

在教排列組合的課程時，我常要求同學們交一份報告；題目是「我這樣作，爲什麼會錯？」指定每位同學要找10題；自認爲解法似乎合理但答案卻是錯誤的題目和算法，藉以瞭解學生的「認知衝突」，而發現經由課堂上「共同認知衝突」的檢討，和下課後「個別觀念的導正」之後，對排列組合機率的教學有相當好的效果。在期末考之前的這種診斷補救教學，有統整連貫的功能，往往在期末考試中，能產生令人滿意的評量結果。

肆：參考資料

1.歐用生　課程發展的基本原理—第二章：過程模式的課程發展　復文圖書出版社。

2. Ross　*A first course in probability.*

—本文作者任教於省立竹南高中—