大學課堂隨筆二則

朱建正

答案的合理性（79年4月）

批改學生考卷時，發現即使是優秀如台大電機系的本地生，也常做出荒謬的答案。在一個求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，四尖內擺線的一周長的問題中，有 $18a$（太長），$6a^{\frac{5}{3}}$（與因次不符）$\frac{8}{3}a$（太短）。實際的答案是 $6a$ 。多數答案錯誤的學生，其所立積分式子是對的，因此如果學生知道答案不對，可以檢查計算而得以改正。

我講給另一班學生聽，他們用 $4\sqrt{2}a$ 做下限，由 $\sqrt{2}=1.414\cdots$，得 $5.6a$ 。因爲四尖內擺線之圖形爲，比以此四頂點相連的正方形邊長 $4\sqrt{2}a$ 稍長。

由於計算機械的進步與普及，數學教育家有一共識。即應把審視答案的合理性列入重要教學目標。相對的，計算技巧和效率的講求則可以退讓一些。在台灣要如何達到這個目標呢？這是一個傷腦筋的問題。

解題能力（79年5月）

我的組合學課有一個數學系新生。當其他同學開始溜課成風時，他反而更加認眞地在課後找我把他弄不懂的搞清楚。我起先反對他的課後私下提問的方式。他解釋說，他若在上課時發問怕妨礙其他直接聽得懂的高材生。雖然我極力指陳，他的發問對其他同學也是值得一聽的。

我想講他做下面這一題的故事。

設 n 階方陣 $[a_{ij}]$ 滿足 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=S$，對所有 i，j 均成立。則若 $[a_{ij}]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k P_k$，其中 P_k 爲排列方陣，即每行每列只有一陣元爲 1，其餘均爲 0 。試證明 $m\leqslant n^2-2n+2$ 。這是課本的習題。

他首先做幾個陣元是整數的實例。發現關鍵在 P_{m-1} 及 P_m 這兩個排列矩陣上，於是他分成 P_{m-1} 及 P_m 中的 1 的重覆有重覆和不重覆兩種情形來討論。

在仔細檢查他的證明之前，我直覺地相信他的證明不太可能會錯。因他已經抓到關鍵。我給他一點建議，兩天後，他再給我一個較簡短的證明。

我對他說，我猜他中學六年，從未以如此經由探索、歸納的方式做習題。他同意了。我非常高興，強烈建議他以同樣心情面對微積分。但他不太喜歡微積分。後來一個選修此課的資訊系學生還問我這題的解法呢。

許多數學系學生在中學時，並無探索歸納的學習經驗。他們一向看解答，弄通後背下來。因此他們在數學系念書的挫折感很深。我相信，必須透過教師和學生的共同努力，並建立共識，才能建立正確的學習數學的方法。

—本文作者任教於台灣大學數學系—