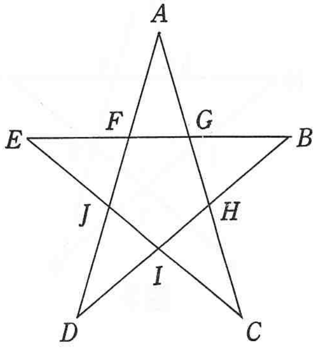
15102　五角星形配號問題(二)

優勝名單：

良好：胡豐榮（內灣國小）

參考答案：（張國男提供）



可設原題所予之五角星形爲如上圖所示之正五角星形（參閱評註第一段）。

因一解經旋轉及反映所得10解可併爲一類，故爲方便計，對於同類 10 解，本文均僅列出一解以爲代表。

若$A+F+G=S$，$B+G+H=S$，$C+H+I=S$，$D+I+J=S$，$E+F+J=S$，將此五式相加，因A，B，C，D，E 皆計算一次，而F，G，H，I，J 皆計算二次，可得$55+(F+G+H+I+J)=5S$，故知$F+G+H+I+J$必爲 5 之倍數，又因$F+G+H+I+J$ 至少

爲 $1+2+3+4+5=15$ ，至多爲 $10+9+8+7+6=40$ ，遂知 $F+G+H+I+J=15,20,25,30,35,40$ ，而對應之 $S=14,15,16,17,18,19$。

此後，不論五數組或三數組，均限定其數全異，且由小而大排之；再者，提及三角形時，均指外圍之三角形。茲將上述六種可能情形，分爲(Ⅰ),(Ⅱ),…,(Ⅵ)討論如下：

(Ⅰ) $S=14$, $F+G+H+I+J=15$。

因和爲 15 之五數組僅有一個，即(1,2,3,4,5)，故內部五邊形之五個頂點必配以 1,2,3,4 及 5，又因三角形之頂點號數和均爲14，故經過 6 之三角形可選配之三數組必爲(3,5,6)，經過 10 之三角形可選配之三數組必爲(1,3,10)。據此，於五角星形實際試配，可得圖1。

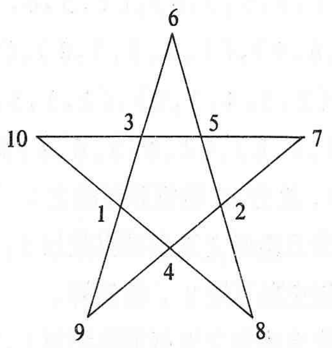


圖 1

(Ⅱ) $S=15$, $F+G+H+I+J=20$。

和爲 20 之五數組共有 7 個，即(1,2,3,4,10),(1,2,3,5,9),(1,2,3,6,8),(1,2,4,5,8),(1,2,4,6,7),(1,3,4,5,7)與(2,3,4,5,6),故分下列 7 種情形加以討論：

⑴若內部五邊形之五個頂點配以 1,2,3,4及 10,則因無交點可配 5(或謂：因經過 5 之三角形無三數組可選配)，故知此情形必然無解。

⑵若五邊形之五個頂點配以 1,2,3,5 及 9，則無交點可配 6，故無解。

⑶若五邊形之五個頂點配以 1,2,3,6及

8，則無交點可配 9，故無解。

⑷若五邊形之五個頂點配以 1，2，4，5 及 8，則無交點可配 7，故無解。

⑸若五邊形之五個頂點配以 1，2，4，6 及 7，則無交點可配 3，故無解。

⑹若五邊形之五個頂點配以 1，3，4，5 及 7，則無交點可配 2，故無解。

⑺若五邊形之五個頂點配以 2，3，4，5 及 6，則無交點可配 1，故無解。

由⑴至⑺之討論，遂知：無使三角形頂點號數和均爲 15 之解。

(Ⅲ) $S=16$，$F+G+H+I+J=25$。

和爲 25 之五數組共有 18 個，即(1，2，3，9，10)，(1，2，4，8，10)，(1，2，5，7，10)，(1，2，5，8，9)，(1，2，6，7，9)，(1，3，4，7，10)，(1，3，4，8，9)，(1，3，5，6，10)，(1，3，5，7，9)，(1，3，6，7，8)，(1，4，5，6，9)，(1，4，5，7，8)，(2，3，4，6，10)，(2，3，4，7，9)，(2，3，5，6，9)，(2，3，5，7，8)，(2，4，5，6，8)與(3，4，5，6，7)，故分 18 種情形討論之：

⑴若五邊形之五個頂點配以 1，2，3，9 及 10，則無交點可配 8，故無解。

⑵若五邊形之五個頂點配以 1，2，4，8 及 10，則無交點可配 9，故無解。

⑶若五邊形之五個頂點配以 1，2，5，7 及 10，則無交點可配 3，故無解。

⑷若五邊形之五個頂點配以 1，2，5，8 及 9，則無交點可配 4，故無解。

⑸若五邊形之五個頂點配以 1，2，6，7 及 9，則無交點可配 10，故無解。

⑹若五邊形之五個頂點配以 1，3，4，7 及 10，則經過 6 之三角形可選配之三數組必爲(3，6，7)，經過 8 之三角形可選配之三數組必爲(1，7，8)，經過 9 之三角形可選配之三數組必爲(3，4，9)。據此，可得圖 2。

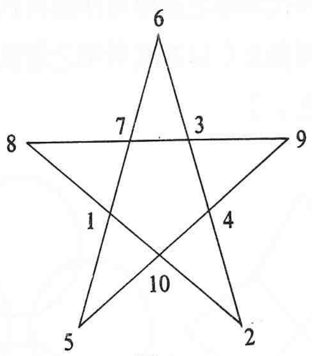


圖 2

⑺若五邊形之五個頂點配以 1，3，4，8 及 9，則無交點可配 10，故無解。

⑻若五邊形之五個頂點配以 1，3，5，6 及 10，則無交點可配 2，故無解。

⑼若五邊形之五個頂點配以 1，3，5，7 及 9，則經過 2 之三角形可選配之三數組必爲(2，5，9)，經過 10 之三角形可選配之三數組必爲(1，5，10)。據此以試配，可得圖 3。

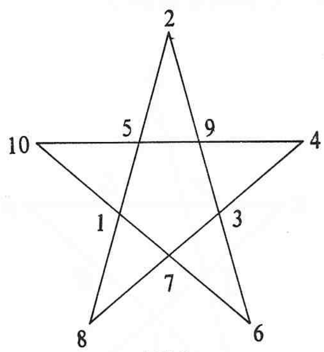


圖 3

⑽若五邊形之五個頂點配以 1，3，6，7 及 8，則無交點可配 10，故無解。

⑾若五邊形之五個頂點配以 1，4，5，6 及 9，則無交點可配 8，故無解。

⑿若五邊形之五個頂點配以 1，4，5，7 及 8，則無交點可配 2，故無解。

⒀若五邊形之五個頂點配以 2，3，4，6 及 10，則無交點可配 1，故無解。

⒁若五邊形之五個頂點配以 2，3，4，7 及 9，則無交點可配 1，故無解。

⒂若五邊形之五個頂點配以 2，3，5，6 及 9，則無交點可配 10，故無解。

⒃若五邊形之五個頂點配以 2，3，5，7 及 8，則無交點可配 10，故無解。

⒄若五邊形之五個頂點配以 2，4，5，6 及 8，則無交點可配 1，故無解。

⒅若五邊形之五個頂點配以 3，4，5，6 及 7，則無交點可配 1，故無解。

(Ⅳ) $S=17$，$F+G+H+I+J=30$。

注意：對於三角形頂點號數和均爲16之任一解，若以 11 爲被減數，減去各交點之號數，則得三角形頂點號數和均爲 17 之一解；反之，對於三角形頂點號數和均爲 17 之任一解，若以 11爲被減數，減去各交點之號數，則得三角形頂點號數和均爲16之一解。〔附記：如此二解，各交點所配二號數之和均爲11，稱爲互補解。〕據此，由(Ⅲ)中之圖 2 及圖 3，可得圖 4 及圖 5 以爲代表。

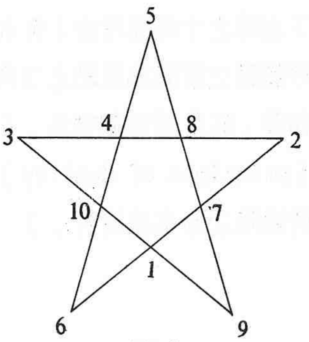


圖4

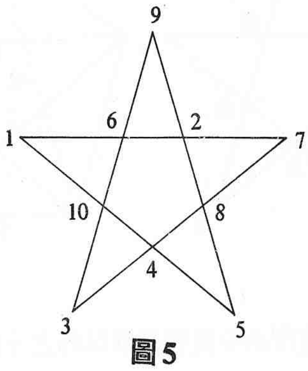


圖5

(Ⅴ) $S=18$，$F+G+H+I+J=35$。

對於三角形頂點號數和均爲18之任一解，若以11爲被減數，減去各交點之號數，則得三角形頂點號數和均爲15之一解。但由(Ⅱ)知無和爲 15 之解，故必無和爲 18 之解。

(Ⅵ) $S=19$，$F+G+H+I+J=40$。

由(Ⅰ)中之圖 1，仿(Ⅳ)處理，可得圖 6 以爲代表。

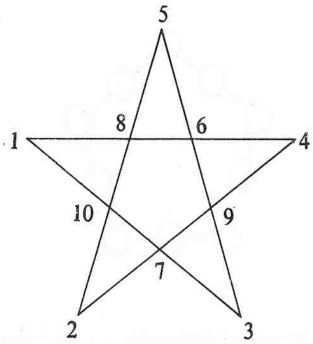
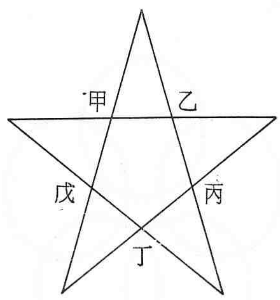


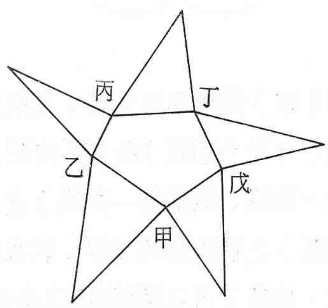
圖6

結論：將上列 6 個代表作旋轉及反映，即得所有解；共有 60 種配號法。

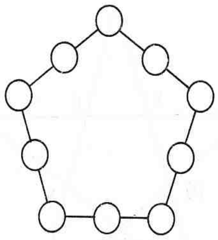
評　　註

若將下列二個五角星形之五邊形頂點同依順時針方向命名（參見下圖），易知一般五角星形之配號問題與下上圖所示之正五角星形之配號問題合而爲一。

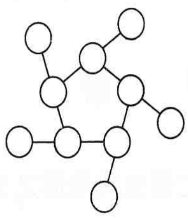




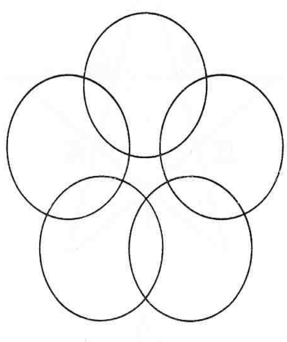
再者，設下圖中五個小圈之中心爲五邊形之頂點，另五個小圈之中心在五邊形之邊上，易知本文所處理之問題與下述問題相當：將圖中10個小圈由1至10配號，並塡入小圈內，使每邊三圈內之號數和均相等，試求所有配號法。



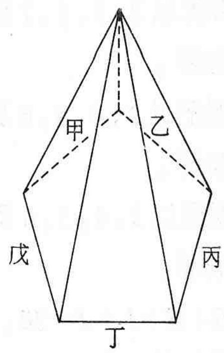
顯然，亦與下述問題同義：㈠將下圖中10個小圈由1至10配號，並塡入小圈內，使每條長線段三圈內之號數和均相等，試求所有配號法。



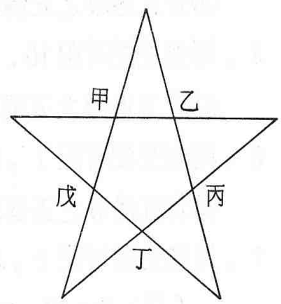
㈡將下列五個圓內10個區域由1至10配號，使每個圓內三個區域之號數和均相等，試求所有配號法。



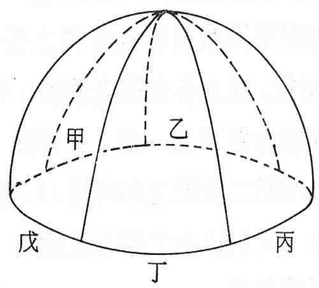
㈢將下⑴(⑶)圖所示五角錐(五瓣瓜皮帽)之十條稜(十段小圓弧)由1至10配號，使經過底面任一頂點(帽沿任一交點)之三條稜(三段小圓弧)之號數和均相等，試求所有配號法。(註：比較下列三圖所採用之命名法。)



(1)

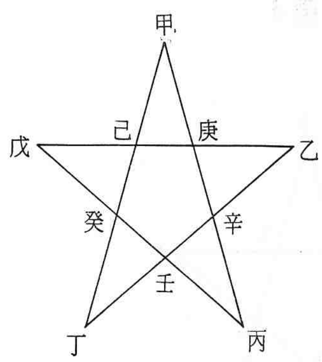


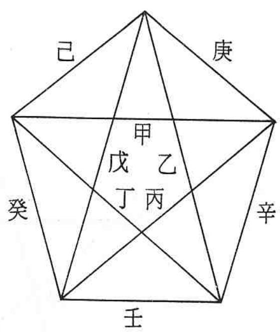
(2)



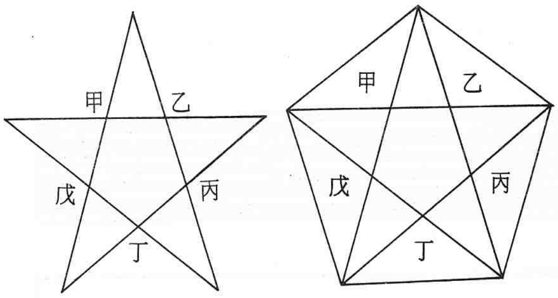
(3)

㈣將構成下右圖之十條線段由1至10配號，使以大五邊形連續三頂點爲頂點之三角形三邊之號數和均相等，試求所有配號法。(註：應用對偶原理〔principle of duality〕，或比較下列二圖所採用之命名法皆可。)

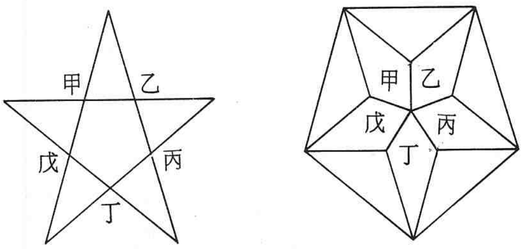




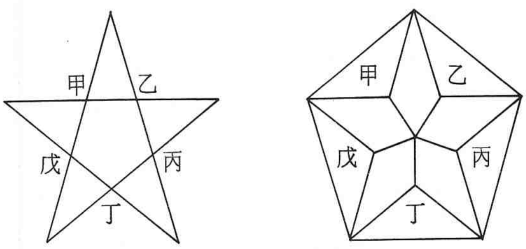
㈤將下右圖所示中央五邊形以外之十個平面區域由1至10配號，使以大五邊形連續三頂點爲頂點之三角形內三個區域之號數和均相等，試求所有配號法。(註：比較下列二圖所採用之命名法。)



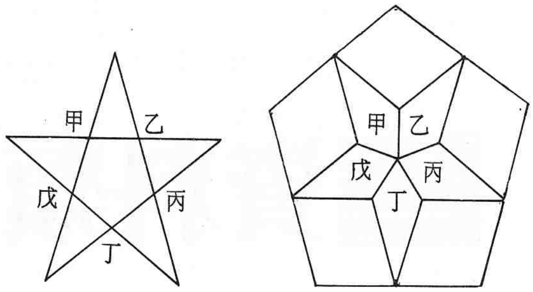
(六)將下右圖所示十個平面區域由1至10配號，使每一個三角形區域連同其所鄰二個四邊形區域之號數和均相等，試求所有配號法。(註：比較下列二圖所採用之命名法。)



(七)將下右圖所示十個平面區域由1至10配號，使每一個四邊形區域連同其所鄰二個三角形區域之號數和均相等，試求所有配號法。(註：比較下列二圖所採用之命名法。)

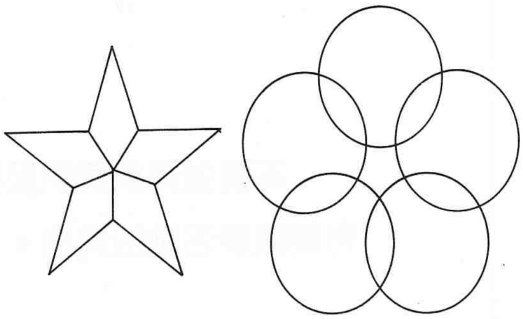


(八)將下右圖所示十個平面區域由1至10配號，使每一個菱形區域連同其所鄰二個四邊形區域之號數和均相等，試求所有配號法。(註：比較下列二圖所採用之命名法。)



習　題

(一)將下左(右)圖所示正五角星形及其中心共十一個交點(十一個平面區域)由1至11配號，使每一個小四邊形四個頂點(每一個圓內三個區域)之號數和均相等，試求所有配號法。〔提示：中心(中央區域)配以11之情形，已於本文討論矣。中心(中央區域)配以1之情形，與上述情形互補，故本文所得代表解之補解可作爲其代表解。其他情形，可仿上(以本文所用之解法及互補對應)處理之。〕



(二)將下圖所示正七角星形及其中心共十五個交點由1至15適當配號，可使每一個小四邊形四個頂點之號數和均相等，試求一解。