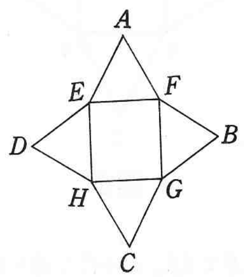
上期徵答問題解答

15101　四角星形配號問題

優勝名單：

良好：胡豐榮（內灣國小）

參考答案：（張國男提供）



可設原題所予之四角星形為如上圖所示之正四角星形（參閱評註第一段）。

因一解經旋轉及反映所得8解可併為一類，故為方便計，對於同類8解，本文均僅列出一解以為代表。

若$A+E+F=S$，$B+F+G=S$，$C+G+H=S$，$D+E+H=S$，將此四式相加，因A，B，C，D皆計算一次，E，F，G，H皆計算二次，可得$36+(E+F+G+H)=4S$，故知$E+F+G+H$必為4之倍數，又因$E+F+G+H$至少為$1+2+3+4=10$，至多為$8+7+6+5=26$，遂知$E+F+G+H=12$，16，20，24，而對應之$S=12$，13，14，15。再者，由$(B+F+G)+(D+E+H)+A+C=36$及$(A+E+F)+(C+G+H)+B+D=36$，可得$A+C=B+D=36-2S$，遂知$A+C=B+D=$ 12，10，8，6。

此後，不論數對或三數組，均限定其數全異，且由小而大排之；再者，提及三角形時，均指外圍之三角形。茲將上述四種可能情形，分為（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）討論如下：

（Ⅰ）$S=12$，$A+C=B+D=12$。

因和為12之數對僅有二個，即〔4，8〕及〔5，7〕，故A與C，B與D必配以此二數對，又因三角形之頂點號數和均為12，故經過4之三角形可選配之三數組必為（2，4，6），經過5之三角形可選配之三數組必為（1，5，6）。據此，可得圖1。

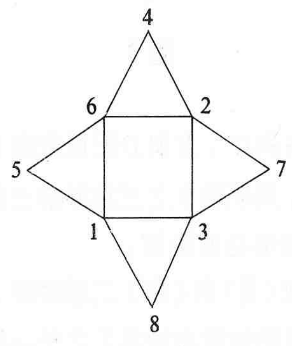


圖1

（Ⅱ）$S=13$，$A+C=B+D=10$。

和為10之數對共有三個，即〔2，8〕，〔3，7〕及〔4，6〕，故分下列三種情形加以討論：

(1)若A與C，B與D配以數對〔2，8〕及〔3，7〕，則經過2之三角形可選配之三數組必為（2，5，6），經過3之三角形可選配之三

數組必為（3，4，6）。據此，可得圖 2 。

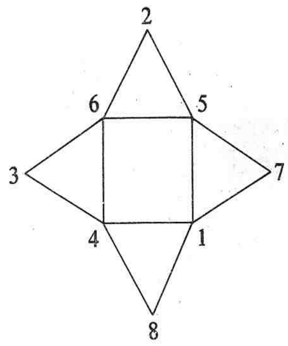


圖2

⑵若 A 與 C，B 與 D 配以數對〔3，7〕及〔4，6〕，則經過 3 之三角形可選配之三數組必為（2，3，8），經過 4 之三角形可選配之三數組必為（1，4，8）。據此，可得圖 3 。

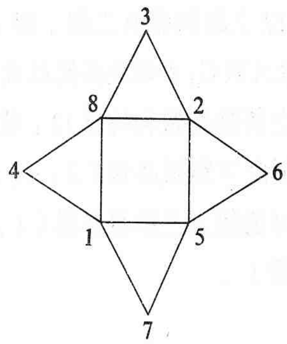


圖3

⑶若 A 與 C，B 與 D 配以數對〔2，8〕及〔4，6〕，則經過 2 之三角形無三數組可選配，故知此情形必然無解。

為處理（Ⅲ）與（Ⅳ）二種情形，注意：對於三角形頂點號數和均為 T 之任一解，若以 9 為被減數，減去各交點之號數，以作為新配之號數（即各交點所配新舊二號數之和均為 9），則所得者係三角形頂點號數和均為 $27-T$ 之一解；如此二解，稱為互補解，所配成之對，稱為互補對。顯然可知：互補係三角形頂點號數和均為 T 之解集合與三角形頂點號數和均為 $27-T$ 之解集合間之一對一對應。利用此種對應，即得（Ⅲ）與（Ⅳ）之結果。

（Ⅲ）$S=14$，$A+C=B+D=8$。

考慮互補對應，由（Ⅱ）中之圖 2 與圖 3 ，可得圖 4 與圖 5 。

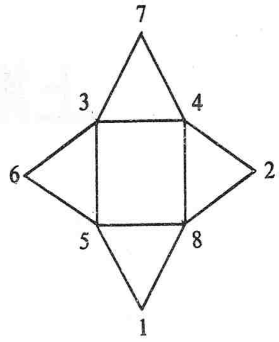


圖4

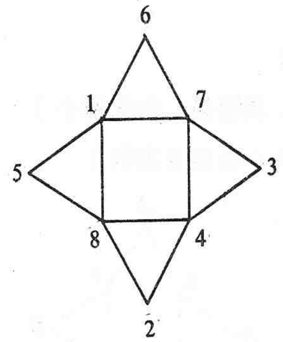


圖5

（Ⅳ）$S=15$，$A+C=B+D=6$。

考慮互補對應，由（Ⅰ）中之圖 1 ，可得圖 6 。

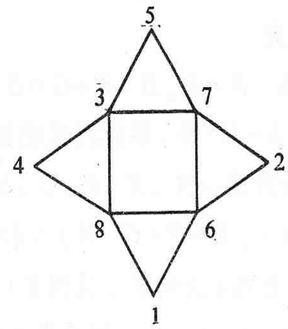
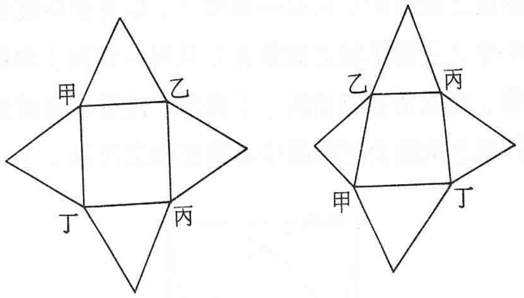


圖6

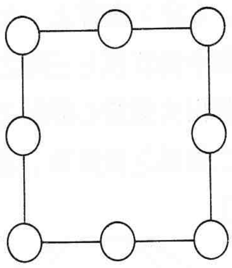
結論：將上列 6 個代表作旋轉及反映，即得所有解；共有 48 種配號法。

評　註

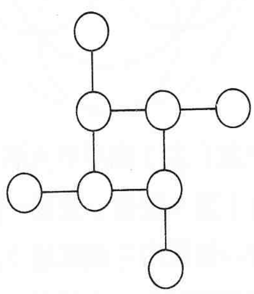
若將下列二個四角星形之四邊形頂點同依順時針方向命名（參見下圖），易知一般四角星形之配號問題與下左圖所示之正四角星形之配號問題合而爲一。



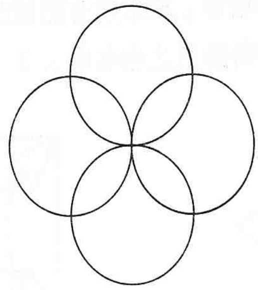
再者，設下圖中四個小圈之中心爲四邊形之頂點，另四個小圈之中心在四邊形之邊上，易知本文所處理之問題與下述問題相當：將圖中八個小圈由 1 至 8 配號，並填入小圈內，使每邊三圈內之號數和均相等，試求所有配號法。



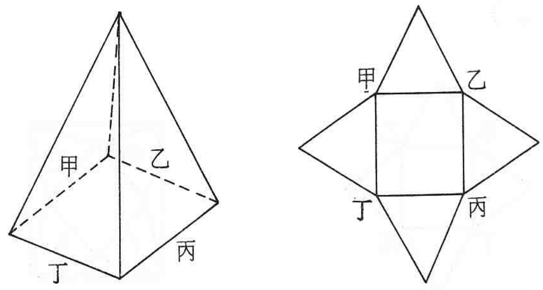
顯然，亦與下述問題同義：(一)將下圖中八個小圈由 1 至 8 配號，並填入小圈內，使每條長線段三圈內之號數和均相等，試求所有配號法。



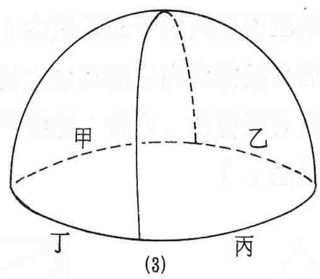
(二)將下圖中八個區域由 1 至 8 配號，使每個圓內三個區域之號數和均相等，試求所有配號法。



(三)將下(1)((3))圖所示四角錐（四瓣瓜皮帽）之八條稜（八段小圓弧）由 1 至 8 配號，使經過底面任一頂點（帽沿任一交點）之三條稜（三段小圓弧）之號數和均相等，試求所有配號法。（註：比較下列三圖所採用之命名法。）

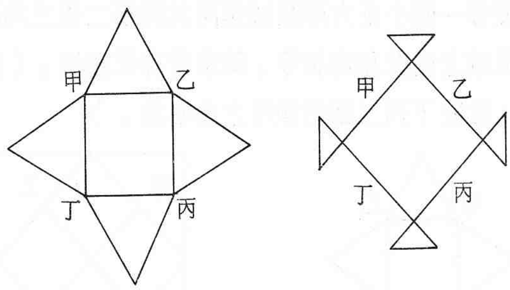


(1)　　(2)



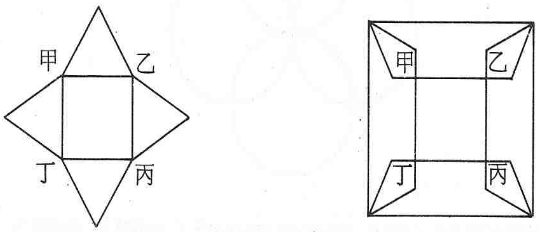
(3)

(四)將構成下右圖之八條線段由 1 至 8 配號，使每一個叉字形三條線段之號數和均相等，試求所有配號法。(註:應用對偶原理〔 principle of duality〕，或比較下列二圖所採用之命名法皆可。)

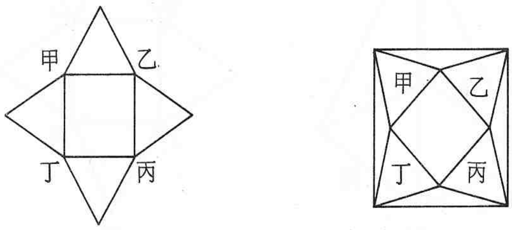


(五)將下右圖所示中央正方形以外之八個平面區

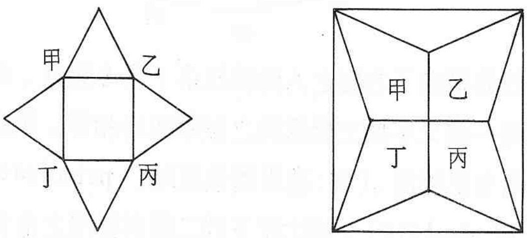
域由 1 至 8 配號，使每一個等腰梯形內三個區域之號數和均相等，試求所有配號法。（註：比較下列二圖所採用之命名法。）



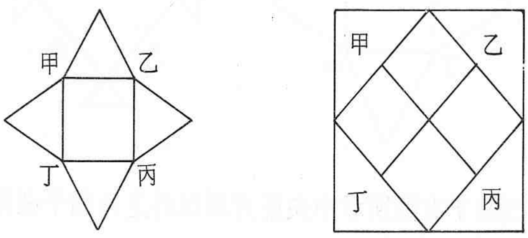
㈥將下右圖所示中央正方形以外之八個平面區域由 1 至 8 配號，使共有中央正方形一個頂點之三個三角形區域之號數和均相等，試求所有配號法。（註：比較下列二圖所採用之命名法。）



㈦將下右圖所示八個平面區域由 1 至 8 配號，使每一個等腰梯形內三個區域之號數和均相等，試求所有配號法。（註：比較下列二圖所採用之命名法。）

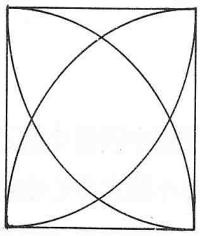


㈧將下右圖所示八個平面區域由 1 至 8 配號，使每一個小正方形區域連同其所鄰二個三角形區域之號數和均相等，試求所有配號法。（註：比較下列二圖所採用之命名法。）

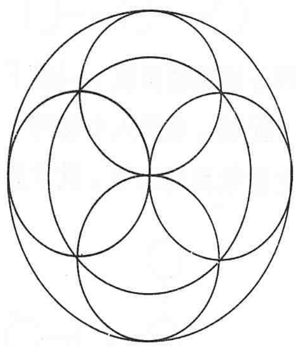


習　題

㈠將下圖所示九個平面區域由 1 至 9 配號，使四分圓外三個區域之號數和（共有四個和），被正方形同一條對角線平分之三個區域之號數和（共有二個和），被中橫線平分之三個區域之號數和（只有一個和），以及被中縱線平分之三個區域之號數和（只有一個和）均相等，試求所有配號法。〔提示：注意各個區域計算之次數及三數組中各數出現之次數。〕



㈡將下圖所示九個交（切）點由 1 至 9 配號，使每一圓周上四點之號數和均相等，試求所有配號法。（註：事實上，大圓直徑上三點之號數和亦與中圓直徑上三點之號數和相等。）〔提示：算出大圓圓心應配之號數，公和，及大圓直徑二端點之號數和，易知 1 必不可配至中圓上。〕



㈢將下左（右）圖所示九個交點（九個平面區域）由 1 至 9 配號，使每一個小四邊形四個頂點（每一個圓內三個區域）之號數和均相等，試求所有配號法。〔提示：中心（中央區域）配以 9 之情形，已於本文討論矣。中心（中央區域）配以 1 之情形，與上述情形互補，

故本文所得代表解之補解可作爲其代表解。其他情形，可仿上（以本文所用之解法及互補對應）處理之。〕