四元數與Cayley數

余文卿　葉國榮

一、數系的發展

數系從自然數$\boldsymbol{N}$到整數$\boldsymbol{Z}$，從整數$\boldsymbol{Z}$到有理數$\boldsymbol{Q}$，這一路發展下來，非常順利。發展後的數系可輕易地由前一數系表現出來；如

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{N}\cup\{0\}\cup(-\boldsymbol{N}),$$

$$\boldsymbol{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\boldsymbol{Z},\ q\neq 0\}。$$

從有理數系$\boldsymbol{Q}$到實數系$\boldsymbol{R}$，就有點小波折了，而需費點心去小心處理了。第一種觀點是引進極限的概念，如此把實數看成是一收斂有理數列$\{c_n\}$的極限，但對固定一實數，這種表示法並不唯一；這也不足為奇，在有理數系中已見過，如$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\cdots\cdots\cdots$。在此我們可定義一等價關係，即

$$\{a_n\}\sim\{b_n\}\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n。$$

如此，將實數看成是收斂之有理數列的等價類的極限。第二種觀點是以小數來表示實數。有理數都可表成**有限小數**或**循環小數**；另外的那些不循環的無窮小數則是**無理數**，這些無理數是$\boldsymbol{Q}$擴充到$\boldsymbol{R}$所添加的新數。

無理數依其代數特性而區分為**代數數**與**超越數**；所謂的代數數，即是滿足整係數多項式方程式的解；如$\sqrt{2}$滿足$x^2-2=0$，$\sqrt[4]{5}$滿足$x^4-5=0$，$\sqrt{2}$與$\sqrt[4]{5}$ 都是代數數。另一方面，圓周率π（$=3.141592\cdots\cdots$）與自然對數的底數e（$=2.71828\cdots\cdots$）都不是代數數，而都是超越數。基本上，要證明一數值是超越數，並不是一件容易的事。

從$\boldsymbol{R}$到複數系$\boldsymbol{C}$，這主要關鍵是加入虛數單位$i=\sqrt{-1}$，i是方程式$x^2+1=0$的解；而

$$\boldsymbol{C}=\{a+bi\mid a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

$\boldsymbol{C}$中的乘法是

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

另外複數也可看成是佈於$\boldsymbol{R}$的二維向量，而將$a+bi$以序對$[a,b]$表示，這時兩序對的乘法是

$$[a,b]\cdot[c,d]=[ac-bd,ad+bc]$$

複數$\boldsymbol{C}$在加與乘的運算下構成一體，這數體具有代數封閉性，即底下定理所述的性質。

代數基本定理：任一複係數的多項式$P(x)$，至少有一複數α，使$P(\alpha)=0$

複數系中不再像實數系，沒有大小的次序，即無法比較兩複數的大小。**共軛複數與範數**(norm)的概念非常重要，$a+bi$的共軛複數

是$a-bi$，而

$$N(a+bi)=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2。$$

對任意複數α，β，很容易可得證：

$$N(\alpha\beta)=N(\alpha)\,N(\beta)\ .$$

將$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$，$a,b,c,d\in \boldsymbol{R}$代入，即得出

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2。$$

二、四元數

仿照實數系到複數系加入虛數單位的方法，我們可以在複數系中加入另一單位j，而定四元數爲

$$\boldsymbol{H}=\{\alpha+\beta j\mid \alpha,\beta\in \boldsymbol{C}\}。$$

在$\boldsymbol{H}$中，很容易定出加法，即

$$(\alpha+\beta j)+(\gamma+\delta j)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)j,$$

如此$\boldsymbol{H}$成爲一加法群。應如何定義$\boldsymbol{H}$中的乘法呢？首先設定$j^2=-1$，要是定$ij=ji$，會有什麼結果呢？如此，則

$$(1+ij)(i+j)=i+j+iji+ij^2=0。$$

有零因子產生，這是數系發展最不願意見到的結果；其實，尙可由$ij=ji$導出其他不好的性質。若定$ij=-ji$，則$\boldsymbol{H}$中的乘法是

$$(\alpha+\beta j)(\gamma+\delta j)=(\alpha\gamma-\beta\bar{\delta})+(\beta\bar{\gamma}+\alpha\delta)j。$$

在定義$\boldsymbol{H}$中乘法的同時，我們也把原來$\boldsymbol{C}$中的交換性犧牲掉了，因$ij=-ji$，習慣上，我們將ij 以另一符號k表示，故

$$\boldsymbol{H}=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in \boldsymbol{R}\},$$

而其中 i,j,k滿足

(1) $i^2=j^2=k^2=-1$，

(2) $ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j$。

而兩四元數$(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)$的乘法則是展開後利用(1)，(2)組合而成，結果是：

$$\begin{aligned}&(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+(a_0b_1+a_1b_0\\&+a_2b_3-a_3b_2)i+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)j\\&+(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)k\ 。\end{aligned}$$

在$\boldsymbol{H}$中，$a+bi+cj+dk$ 的共軛數是$a-bi-cj-dk$，又

$$N(a+bi+cj+dk)=a^2+b^2+c^2+d^2。$$

由定義，我們可得證出 $N(xy)=N(x)N(y)$。將 $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$，$y=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$ 代入得

$$\begin{aligned}&(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\&=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)^2+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3\\&-a_3b_2)^2+(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_0b_3\\&+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)^2\ 。\end{aligned}$$

這就是有名的Lagrange 等式，在證明四平方和定理（任一正整數都可表成四整數的平方和）中扮演非常重要的角色。

三、Cayley數

Cayley 數是由四元數$\boldsymbol{H}$加入另一單位e而得，即

$$\mathscr{C}=\{P+Qe\mid P,Q\in \boldsymbol{H}\}。$$

乘法的定義是

$$\begin{aligned}&(P+Qe)(R+Se)\\&=(PR-\bar{S}Q)+(SP+Q\bar{R})e\end{aligned}$$

Cayley 數$\mathscr{C}$中，除$\boldsymbol{H}$中原來就有的4個單位$1,i,j,k$外，另由e與這四個單位相乘而得出四個單位。因此$\mathscr{C}$中共有8個單位；而以$e_0(=1)$，e_1，e_2，e_3，e_4，e_5，e_6，e_7分別表示，這些單位與原先單位i,j,k,e 關係爲

$$e_0=1,\ e_1=j,\ e_2=i,\ e_3=e,\ e_4=-k$$
$$e_5=ie,\ e_6=ke,\ e_7=je。$$

每一 Cayley 數都可表成

$$x=\sum_{j=0}^{7}a_je_j\ ,\ a_j\in \boldsymbol{R}。$$

而單位之間的乘法滿足下面的法則：

(1) $xe_0=e_0x=x$，$\forall\ x\in\mathscr{C}$，

(2) $e_i^2=-e_0$，$i=1,2,\cdots\cdots,7$，

(3) $e_1e_2e_4=e_2e_3e_5=e_3e_4e_6=e_4e_5e_7$

$$=e_5e_6e_1=e_6e_7e_2=e_7e_1e_3$$
$$=-e_0 \text{。}$$

現將上面的法則說明如下：

第一式表明 $e_0=1$ 是 $\mathscr{C}$ 中乘法的單位元素。

第二式表明 8 個單位，除 e_0 外，其他的 7 個單位的平方都是 -1，故方程式 $x^2+1=0$ 在 $\mathscr{C}$ 中至少會有 7 個解。

第三式中，列出一些可結合之單位的連乘積。直接的驗證顯示 $\mathscr{C}$ 中的乘法沒有結合律，即

$$(xy)z=x(yz)$$

不一定成立；而在沒有結合率的乘法中，(3)式中的連乘積應是沒有意義。但事實並沒有想像中的壞，$\mathscr{C}$ 中的某些單位的乘積確有結合律。以 $e_1e_2e_4=-e_0$ 來說，這式子表示的意義有二：

① $e_1(e_2e_4)=(e_1e_2)e_4=-e_0$；

② $e_1e_2=-e_2e_1=e_4$，$e_2e_4=-e_4e_2=e_1$，$e_4e_1=-e_1e_4=e_2$。

回顧一下，四元素 $\boldsymbol{H}$ 中的單位 i，j，k 也具有同樣性質，因而 $\boldsymbol{H}$ 與 $\boldsymbol{R}e_0+\boldsymbol{R}e_1+\boldsymbol{R}e_2+\boldsymbol{R}e_4$ 有同樣的代數結構。

當然 e_1，e_2，e_4 只是(3)式的一特例，另外尚有 6 個，如 $e_2e_3e_5=-e_0$ 也表示 $\boldsymbol{R}e_0+\boldsymbol{R}e_2+\boldsymbol{R}e_3+\boldsymbol{R}e_5$ 與 $\boldsymbol{H}$ 有相同的代數結構。

現在來看兩個不可結合的例子。

$$(e_1e_2)e_3=e_4e_3=-e_3e_4=-e_6 \;;$$

另一方面

$$e_1(e_2e_3)=e_1e_5=e_6 \;;$$

故 $(e_1e_2)e_3 \neq e_1(e_2e_3)$。又

$$(e_1e_2)(e_3e_4)=e_4e_6=e_3 \,,$$
$$[e_1(e_2e_3)]e_4=(e_1e_5)e_4=e_6e_4=-e_3 \,,$$
$$e_1[(e_2e_3)e_4]=e_1(e_5e_4)=e_1(-e_7)=e_3 \text{。}$$

上面例子顯示單位相乘，因不具結合性，算出的結果會有符號上的差異。

Cayley 數中，$x=\sum_{i=0}^{7}a_ie_i$ 的共軛數定爲 $\overline{x}=2a_0-x$，亦即 $\overline{x}=a_0e_0-\sum_{i=1}^{7}a_ie_i$。又範數 N 的定義是

$$N(x)=x\overline{x}=\overline{x}x=\sum_{i=0}^{7}a_i^2 \text{。}$$

因而，若 $x\neq 0$，則 x 有一乘法反元素 $[N(x)]^{-1}\overline{x}$。

證明 $N(xy)=N(x)N(y)$ 並不簡單，這要用到一些特殊乘積的結合性，即

$$(\overline{x}x)y=\overline{x}(xy) \text{ 與 } (xy)\overline{y}=x(y\overline{y}),$$

將 $x=\sum_{i=0}^{7}a_ie_i$ 與 $y=\sum_{i=0}^{7}b_ie_i$ 代入 $N(xy)=N(x)N(y)$ 中，即得出下面的等式：

$$(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_7^2)(b_0^2+b_1^2+\cdots+b_7^2)$$
$$=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4-a_5b_5-a_6b_6$$
$$-a_7b_7)^2+\Sigma(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_4+a_3b_7$$
$$-a_4b_2+a_7b_6-a_6b_5-a_7b_3)^2 \;;$$

其中 Σ 表示將足碼 0 固定，而將 1，2，3，4，5，6，7 依循環次序變換，如依次變換爲 2，3，4，5，6，7，1。注意到等式右邊的八個數也正好是 $\left(\sum_{j=0}^{7}a_je_j\right)\left(\sum_{j=0}^{7}b_je_j\right)$ 之乘積的 8 個係數。

實數 $\boldsymbol{R}$、複數 $\boldsymbol{C}$，四元素 $\boldsymbol{H}$ 與 Cayley 數 $\mathscr{C}$ 都可看成佈於 $\boldsymbol{R}$ 的向量空間，維數分別是 1，2，4，8。在高中階段，對 $\boldsymbol{C}$ 已非常熟習；但對 $\boldsymbol{H}$ 與 $\mathscr{C}$ 知道的人，可能非常少，甚至有些人並不知道。

四、四平方和和八平方和

四平方和定理告訴我們：任一正整數 n 必可表成四個整數的平方和；即不定方程式

$$x^2+y^2+z^2+w^2=n$$

至少有一組整數解。以 $A_4(n)$ 表示上面方程式之整數解的個數，則 $A_4(1)=8$，$A_4(2)=24$，$A_4(3)=32$；一般式爲

$$A_4(n)=8\sum_{d|n\;\; 4\nmid d} d \text{。}$$

當 n 是奇數時，$A_4(n)=8\times($ n 的正奇因數和）；當 n 是偶數時，$A_4(n)=24\times($ n 的正奇因數和）。

因任意正整數可表成四平方和，自然也可以表成八平方和，以 $A_8(n)$ 表示將 n 表成八平方和的方法，則有

$$A_8(n)=16\sum_{d\mid n}(-1)^{n-d}d^3$$

如何導出 $A_4(n)$ 與 $A_8(n)$ 呢？這並不是容易的事，需要用到模型式（modular forms）與 theta 級數的理論。常見的方法是考慮 theta 級數

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i n^2 z}\quad,z=x+iy,y>0;$$

則有

$$[\theta(z)]^4=\sum_{n=0}^{\infty}A_4(n)e^{\pi i n z}\quad,$$

$$[\theta(z)]^8=\sum_{n=0}^{\infty}A_8(n)e^{\pi i n z}\quad,$$

利用 $[\theta(z)]^4$ 與 $[\theta(z)]^8$ 的其他表現式，即可得出 $A_4(n)$ 與 $A_8(n)$ 的數值表示。