從西爾威斯特問題講起

—談區組設計的大集

康慶德

事情要追溯到140年前，那是公元1850年，英格蘭教會的一個教區長柯克曼（Thomas Penygon Kirkman）在一本名爲《女士與先生之日記》的刊物上發表了一篇題爲「疑問六」的文章，提出了名揚後世的「柯克曼女生問題」：

女教師要帶她的15名女學生去散步，要求給出一個一週的隊形安排，每天都是5行3列，但需每兩名女生都恰有一天排在同一行。

問題發表後翌年他即給出了如下的答案：

星期日{1,2,3}{4,8,12}{5,10,15}
{6,11,13}{7,9,14}

星期一{1,4,5}{2,8,10}{3,13,14}
{6,9,15}{7,11,12}

星期二{1,6,7}{2,9,11}{3,12,15}
{4,10,14}{5,8,13}

星期三{1,8,9}{2,12,14}{3,5,6}
{4,11,15}{7,10,13}

星期四{1,10,11}{2,13,15}{3,4,7}
{5,9,12}{6,8,14}

星期五{1,12,13}{2,4,6}{3,9,10}
{5,11,14}{7,8,15}

星期六{1,14,15}{2,5,7}{3,8,11}
{4,9,13}{6,10,12}

這個饒有興味的遊戲引起了很多數學家的關注。就在他提出問題的那一年，英國數學家西爾威斯特（James Jaseph Sylvester）和凱萊（Arther Cayley）對這個問題又提出了一個進一步的要求。即希望給出一個總共13週的隊形安排，使得不僅每週的安排都滿足前述條件，而且要求每三名女生在全部13×7=91天中都恰有一天排在一行。這就是所謂的「西爾威斯特問題」。它的難度相當大，以至延續了120多年才被解決。以下就是丹尼斯頓（R.H.F. Denniston）在1974年借助於電子計算機找到的這個問題的一個答案：

星期日{a, b, i}{$1+i$, $4+i$, $5+i$}
{$2+i$, $6+i$, $11+i$}{$3+i$, $7+i$, $10+i$}
{$8+i$, $9+i$, $12+i$}

星期一{a, $1+i$, $6+i$}{b, $2+i$, $8+i$}
{i, $10+i$, $12+i$}{$3+i$, $5+i$, $9+i$}
{$4+i$, $7+i$, $11+i$}

星期二{a, $4+i$, $10+i$}{b, $11+i$, $12+i$}
{i, $5+i$, $8+i$}{$1+i$, $2+i$, $3+i$}
{$6+i$, $7+i$, $9+i$}

星期三{a, $3+i$, $12+i$}{b, $5+i$, $7+i$}
{i, $4+i$, $6+i$}{$1+i$, $8+i$, $11+i$}
{$2+i$, $9+i$, $10+i$}

星期四 $\{a, 2+i, 5+i\}\{b, 4+i, 9+i\}$
$\{i, 3+i, 11+i\}\{1+i, 7+i, 12+i\}$
$\{6+i, 8+i, 10+i\}$

星期五 $\{a, 9+i, 11+i\}\{b, 1+i, 10+i\}$
$\{i, 2+i, 7+i\}\{3+i, 4+i, 8+i\}$
$\{5+i, 6+i, 12+i\}$

星期六 $\{a, 7+i, 8+i\}\{b, 3+i, 6+i\}$
$\{i, 1+i, 9+i\}\{2+i, 4+i, 12+i\}$
$\{5+i, 10+i, 11+i\}$

這裡 15 個女學生的標記爲 a，b，0，1，2，……，12；13 個週的標記爲 $i=0$，1，2，……，12；而數字加法均以模 13 來取值。

「柯克曼女生問題」現在被公認爲是組合數學中區組設計分支的鼻祖，而「西爾威斯特問題」則是區組設計中大集問題的最早淵源。

一、形形色色的區組設計

設 X 是一個 v 元集，$\mathscr{A}$ 是 X 的一些「子集」，它們滿足某種「條件」時，稱 $(X, \mathscr{A})$ 爲一個區組設計，以下我們將看到，這裡的「子集」概念可以是更廣泛意義下的（譬如帶有某種序關係的），但通常均被稱爲區組。而隨著「子集」及「條件」規約的不同將產生形形色色的各種區組設計家族。

1.成對平衡設計（簡稱PBD）

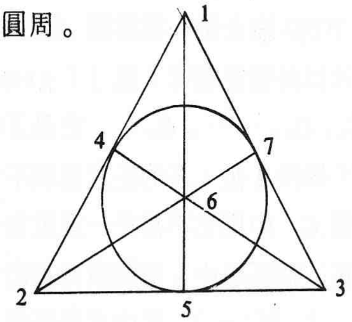
「子集」即指通常意義下的，每個子集的尺寸限定在一個正整數集合 K 中。而「條件」是「X 的每兩個不同的元恰包含在 $\mathscr{A}$ 中 λ 個區組中」，這種區組設計被記爲 $B[K, \lambda; v]$。

例如，$\mathscr{A}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,3,4\}\}$ 就是 4 元集 $X=\{1,2,3,4\}$ 上的一個 $B[\{2,3\}, 1; 4]$ 設計。

2.平衡不完全區組設計（簡稱BIBD）

這是PBD當 $K=\{k\}$ 時的特例，即區組的尺寸（常稱爲長度）都是一樣的，這種設計被記爲 $B[k, \lambda, v]$，當 $k=3$ 時稱爲三元系，$\lambda=1$ 時稱爲斯坦納（Steiner）系，一般記斯坦納三元系 $B[3, 1; v]$ 爲 $STS(v)$，v 稱爲其階數。

例如，下圖給出一個 $STS(7)$，它有七個區組，分別是此正三角形的三條邊，三條高線和內切圓周。



3.可分解的平衡不完全區組設計（簡稱RBIBD）

它是一種可分解的BIBD，其可分解性指的是區組集 $\mathscr{A}$ 可以分拆爲幾個（平行）類，每類中的全部區組都恰好是集合 X 的一個分拆。它被記爲 $RB[k, \lambda; v]$，可分解的 $STS(v)$ 常記爲 $KTS(v)$，即柯克曼三元系。

例如，開始提到的柯克曼女生問題的解答就是一個 $KTS(15)$，它共由35個長度爲3的區組構成，可分拆爲七個平行類，而每個平行類（分別對應於一週中的每天）包含五個區組（即每天中的五行）。

我們再舉一個例子，以下矩陣給出一個 $KTS(9)$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

它共有 12 個區組，分爲四個平行類：

三個行——$\{1,2,3\}$，$\{4,5,6\}$，$\{7,8,9\}$；

三個列——$\{1,4,7\}$，$\{2,5,8\}$，$\{3,6,9\}$；

主方向的三條平行線——$\{1,5,9\}$，$\{2,6,7\}$，$\{3,4,8\}$；

副方向的三條平行線——$\{3,5,7\}$，

$\{1,6,8\}$，$\{2,4,9\}$。

此外，它還有以下的特點：

從任兩不同平行類分別取出一個區組，這兩區組必有一公共點。

4.可分組設計（簡稱GDD）

這是 PBD 概念的一種推廣。除去集合X及區組集A以外還定義有「組」（group）集合$\mathscr{G}=\{G_1, G_2, \cdots\cdots, G_s\}$，它是$X$的一個分拆。而「條件」是：$X$的任意兩個不同元素若含在某個 G_i 中則它不被任一區組包含，否則它包含在λ個區組中。這種設計被記為

$GD[K, \lambda, M; v]$，其中K為區組長度所成的集合，M為組長度所成的集合。當$K=\{k\}$，$M=\{m\}$（即諸區組等長，諸組亦等長）時，設計$GD[k, \lambda, m; km]$被記為$TD[k, \lambda; m]$，稱為橫截設計（transversal design）。

例如，下邊兩個正交的 3 階拉丁方陣

$$A=(a_{ij})_1^3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},$$

$$B=(b_{ij})_1^3=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$$

可以給出如下的橫截設計$TD[4, 1; 3]=GD[4, 1, 3; 12]$：

$\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

$\{(1,1),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

$\{(1,1),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

$\{(1,2),(2,1),(3,2),(4,3)\}$

$\{(1,2),(2,2),(3,3),(4,1)\}$

$\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,2)\}$

$\{(1,3),(2,1),(3,3),(4,2)\}$

$\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,3)\}$

$\{(1,3),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

這裡，元素集$X=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3\}$，組集合為$G_i=\{\{i\}\times\{1,2,3\}\}$，$i=1,2,3,4$，而諸區組的構作方法為

$$\{(1,i),(2,j),(3,a_{ij}),(4,b_{ij})\}\quad(1\leqslant i, j\leqslant 3)$$

5.Mendelsohn 系設計

它的「子集」是有向k循環區組，記為$\langle a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k\rangle$，當$i\neq j$時$a_i\neq a_j$。（亦可等同地記為$\langle a_2, a_3, \cdots\cdots, a_k, a_1\rangle$，或$\langle a_3, \cdots\cdots, a_k, a_1, a_2\rangle$，……，或$\langle a_k, a_1, \cdots\cdots, a_{k-1}\rangle$），每一區組由$k$個有序對$(a_1, a_2)$，$(a_2, a_3)$，……，$(a_{k-1}, a_k)$，$(a_k, a_1)$ 組成。而「條件」是：X的每兩個不同元的有序對恰包含在λ個區組中。這種設計可記為$M[k, \lambda; v]$。

$k=3$，$\lambda=1$時，它稱為Mendelsohn 三元系（記為$MTS(v)$），這是 1971 年由N. Mendelsohn 首先提出並研究的。

例如，$\mathscr{A}=\{\langle a, b, 0\rangle, \langle b, a, 1\rangle, \langle a, 0, 1\rangle, \langle b, 1, 0\rangle\}$ 就是集合$X=\{a, b, 0, 1\}$上的一個$MTS(4)$。

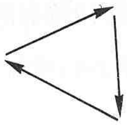
6.可遷三元系設計（TTS(v)）

它的「子集」是可遷三元組(b_1, b_2, b_3)，即一種有序的 3 元組，它包含有三個有序對(b_1, b_2)，(b_2, b_3)，(b_1, b_3)，而「條件」是：X的每兩個不同元的有序對恰包含在一個區組中，這種設計常記為$TTS(v)$。

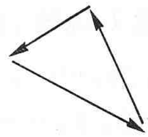
例如，$\mathscr{A}=\{(a, b, 0), (b, 1, a), (0, a, 1), (1, 0, b)\}$即是$X=\{a, b, 0, 1\}$上的一個$TTS(4)$。

為了說明STS，MTS和TTS 這三種三元系的區別，我們還可以從圖論的觀點來定義這三種設計。一個$STS(v)$ 是v階完全無向圖 K_v 的一種無向三角形分拆（即將K_v 的 $\frac{v(v-1)}{2}$ 條邊分拆為$\frac{v(v-1)}{6}$個組，使得每組都恰是一個三角形的三條邊）。一個$MTS(v)$是v階對稱完全有向圖K_v^*的一種有向三角形分拆（即將K_v^*的$v(v-1)$條有向

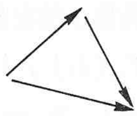
邊分拆爲$\frac{v(v-1)}{3}$個組，使得每組都恰是一個形如



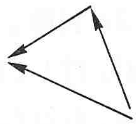
或



的有向三角形）。而一個$TTS(v)$也是K_v^*的一種三角形分拆，只是三角形的形狀爲



或



我們還有另外一種名爲$OTS(v)$的三元系（有序三元系），它的區組可以是上列任一種定向三角形。

7. 有序三元系設計（$OTS(v)$）

例如$A=\{(a,b,0),(b,1,a),(0,1,b),\langle a,1,0\rangle\}$即是$X=\{a,b,0,1\}$上的一個$OTS(4)$。它包含三個可遷三元組和一個循環三元組。（當然，前邊給出的$MTS(4)$及$TTS(4)$也都可以作爲$OTS(4)$的）。

還有許多其他種類的區組設計，不再例舉了。區組設計理論之所以有今日這樣蓬勃的發展當然已遠不止是140年前柯克曼女生問題這種趣味遊戲的性質了，它早已在試驗設計、賽程安排、數字通訊以及計算機科學等方面找到了強烈的應用背景。經過衆多數學家一代接一代的艱苦努力，許多設計的存在性、構造方法以至計數等都已獲得了完美的結果。當然也還有相當多的老設計問題及不斷湧現出來的新設計問題等待人們去繼續探索。

二、區組設計的大集

設(X,A)是某種區組設計（不妨稱爲C-區組設計），A由X的一部分C-「子集」組成，如果可以將X的全部C-「子集」分拆爲若干個類A_i，使得每個(X,A_i)都恰好是一個C-區組設計，則稱這些(X,A_i)構成一個C-區組設計的大集。

讓我們首先來看一下斯坦納三元系的大集情況。不難看出，一個$STS(v)$由$\frac{v(v-1)}{6}$個三元組構成，而v元集合可組成總共$\frac{v(v-1)(v-2)}{6}$個三元組。因此若存在v階斯坦納三元系大集（它常被記爲$LSTS(v)$），則它應由$v-2$個兩兩不相交的（即無公共區組的）$STS(v)$構成。早在上一世紀中葉，柯克曼和M. Reiss 就各自獨立地證明了：

定理：存在$STS(v)$當且僅當$v\equiv 1$或$3 \pmod 6$。

於是，斯坦納三元素大集問題就是：「對每個階數$v\equiv 1,3 \pmod 6$是否存在$LSTS(v)$？」但這可是一件相當困難的事，試想將$\frac{v(v-1)(v-2)}{6}$個三元組等分爲$v-2$個類的方法共有

$$\frac{\left(\frac{v(v-1)(v-2)}{6}\right)!}{\left[\left(\frac{v(v-1)}{6}\right)!\right]^{v-2}(v-2)!}$$

種，即使$v=7$，它也有5.12×10^{33}這樣的分法，隨着v的增長，我們將面對連計算機也無法對付的天文級次數！當然，數學家們對付這一問題的手段絕不會是這麼簡單的，但僅從西爾威斯特問題（它是一種由13個$KTS(15)$組成的大集，也同時就是一個$LSTS(15)$）歷經120年之久才解決這一事實也表明了大集問題的難度。

1850年，柯克曼首先給出了$LSTS(9)$，而凱萊則證明了最多只能有兩個區組不相交的$STS(7)$，即不存在$LSTS(7)$。此後直到本世紀七十年代初，$LSTS$的存在階數仍還是很零碎的。1973年L. Teirlinck給出了$LSTS(v)\rightarrow LSTS(3v)$，1975年A.Rosa

給出了$LSTS(v)\rightarrow LSTS(2v+1)$，這兩個漂亮的結果將遞歸構造方法引入到大集的研究工作中。1983～84年，一位名不見經傳的小人物，中國包頭九中的物理教師陸家羲在經過20多年的艱苦奮鬥之後投稿《Journal of Combinatorial Theory》，以前後六篇文章100頁的篇幅公佈了如下的大集定理：

「對于$v\equiv 1, 3 \pmod 6$，$v>7$，除去$v=141, 283, 501, 789, 1501$和$2365$這六個未定的階數外，存在$LSTS(v)$。」1989年底，L. Teirlinck 利用陸家羲所提出的一種輔助設計LD，採用PBD閉集方法證明了上述六個階數的斯坦納三元系大集也存在。至此，前後困擾組合數學界達140年之久的$LSTS$問題圓滿結束。

縱觀$LSTS(v)$的全部構造方法，不外是直接法和遞歸法兩種方式，所用的工具和手段涉及代數的、幾何的、數論的以及組合的多種。本文開始就已經介紹過一個可分解的$LSTS(15)$，它是用計算機找到的「西爾威斯特問題」的解。現在我們再給出一個不可分解的$LSTS(15)$，這是筆者利用有限域方法得到的直接構造。

設F爲13元有限域，$a, b\notin F$，我們在集合$X=\{a, b\}\cup F$上構造如下的$LSTS(15)=\{(X, B_x);\ x\in F\}$，$B_x$由五部分區組構成：

(1) $\{a, b, x\}$

(2) $\{a, y_{2i}, y_{2i+1}\}$，$\{b, y_{2i+1}, y_{2i+2}\}$ $(0\leqslant i\leqslant 5)$

(3) $\{x, z_j, z_j'\}$ $(1\leqslant j\leqslant 6)$

(4) $\{y, 4x+10y, 12x+2y\}$，$(y\in F\setminus\{x\})$

(5) $\{t_k, t_k', t_k''\}$ $(1\leqslant k\leqslant 4)$

試說明如下：其中的加、乘法爲域F中的運算，而下標就模12取值。易知，對給定的$x\in F$及$\lambda\in F\setminus\{0, 1\}$，映射

$$f_\lambda: y\rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y \quad (y\in F\setminus\{x\})$$

給出點集$F\setminus\{x\}$上的1－1變換，從而將產生的有向圖分析爲若干個有向圈，可以證明：

當$\lambda=8$時，得到一個長爲12的有向圈$(y_0, y_1, \cdots\cdots, y_{11})$，其中$y_{i+1}=f_8(y_i)$，$i=0, 1, \cdots\cdots, 11$；

當$\lambda=2$時，得到6個長爲2的有向圈(z_j, z_j')，其中$z_j'=f_2(z_j)$，$z_j=f_2(z_j')$，$j=1, 2, \cdots\cdots, 6$。

當$\lambda=11$時，得到4個長爲3的有向圈(t_j, t_j', t_j'')，其中$t_j'=f_{11}(t_j)$，$t_j''=f_{11}(t_j')$，$t_j=f_{11}(t_j'')$，$j=1, 2, \cdots, 6$。這些即是(2)、(3)、(5)諸區組中所需要的各參數。

關於柯克曼三元系大集，由於可分解性所帶來的進一步難度，盡管它是與斯坦納三元系大集問題同時提出的，却遠還未取得多大進展，至今仍只是一些零散的結果，甚至連$LKTS(21)$這樣小階數的構造也還未找到。這裏，我們介紹$LKTS(9)$的一種構造方法，它是由以下七個3階方陣給出的：

$$\begin{bmatrix}1&2&4\\3&7&8\\9&5&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&8\\9&4&3\\7&6&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&5\\9&8&3\\4&7&6\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&9\\7&4&3\\5&8&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\4&6&9\\7&8&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&6\\3&5&7\\4&8&9\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&7\\3&4&6\\5&9&8\end{bmatrix}$$

對應於每個方陣，我們可以（按照前邊已談過的辦法）給出一個$KTS(9)$，而所得到的七個$KTS(9)$是兩兩不相交的。

在區組設計理論中，除了要考慮區組彼此不相交的設計情況（大集問題實際上即是對此情況下最多個數的計數討論）外，還常常要考慮彼此不同構的設計問題。對於同類型的兩個區組設計$(X, \mathscr{B}_1)$和$(X, \mathscr{B}_2)$，若存在元素集X的一個1－1變換，使得$\mathscr{B}_1$的全部區組恰

被變換爲 $\mathscr{B}_2$ 的全部區組，則稱此二區組設計是同構的，否則稱爲不同構。相應地，同類型的兩個區組設計大集 $\{(X,\mathscr{B}_i)\}_i$ 與 $\{(X,\mathscr{B}'_i)\}_i$，若存在 1－1 變換，使得全部 $\mathscr{B}_i$ 分別與全部 $\mathscr{B}'_i$ 是一一同構的，則稱這兩個大集是同構的。

關於不同構的區組設計和不同構的區組設計大集的研究結果尚不多。上邊我們已經指出過兩個不同構的 $LSTS(15)$。這裏可以再提供一個與上述 $LKTS(9)$ 不同構的另一個 $LKTS(9)$：

$$\begin{bmatrix}1&3&9\\2&7&5\\4&8&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&9&2\\7&4&5\\8&6&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&7\\4&8&5\\6&3&9\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&7&4\\8&6&5\\3&9&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4&8\\6&3&5\\9&2&7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&8&6\\3&9&5\\2&7&4\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&6&3\\9&2&5\\7&4&8\end{bmatrix}。$$

法國數學家 S. Bays〔14〕曾指出，恰有兩個不同構的 $LKTS(9)$，而 Kramar 與 Mesner〔15〕則指出，恰有兩個不同構的 $LKTS(13)$。

三、幾類三元系的大集

七十年代初，N. Mendelsohn 提出了 $MTS(v)$ 的概念，並證明了它的存在的譜是

$$v\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ v\neq 6$$

J.C. Bermond 也同時從對稱完全有向圖的長度爲 3 的圈分解的角度給出了同一結果。從八十年代開始，人們就開始了對 MTS 大集存在性的研究，與此幾乎同時開始的是另兩個三元系——TTS 和 OTS 的大集研究工作。。$TTS(v)$ 和 $OTS(v)$ 存在的譜都是

$$v\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3),$$

比 $MTS(v)$ 恰多一個值 $v=6$（以下我們將看到，正是因爲這一差別給 MTS 的大集構造增大了難度）。MTS，TTS 和 OTS 的大集分別被記爲 $LMTS$，$LTTS$ 和 $LOTS$。

不難計算出，一個 $MTS(v)$ 包含有 $\dfrac{v(v-1)}{3}$ 個區組，$TTS(v)$ 和 $OTS(v)$ 也同樣，而因爲 v 元集可組成總共 $\dfrac{v(v-1)(v-2)}{3}$ 個循環三元組，又可組成總共 $v(v-1)(v-2)$ 個可遷三元組，所以

$$\begin{cases}\text{一個 } LMTS(v) \text{ 由 } v-2 \text{ 個 } MTS(v) \text{ 組成;}\\ \text{一個 } LTTS(v) \text{ 由 } 3(v-2) \text{ 個 } TTS(v) \text{ 組成;}\\ \text{一個 } LOTS(v) \text{ 由 } 4(v-2) \text{ 個 } OTS(v) \text{ 組成。}\end{cases}$$

例如，對於 $v=4$，我們有

$LMTS(4)$：

$\{\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,1,4\rangle,\langle 1,3,4\rangle,\langle 2,4,3\rangle\}$，
$\{\langle 1,2,4\rangle,\langle 2,1,3\rangle,\langle 1,4,3\rangle,\langle 2,3,4\rangle\}$，

$LTTS(4)$：

$\{(1,2,3),(3,4,2),(2,1,4),(4,3,1)\}$，
$\{(1,2,4),(4,3,2),(2,1,3),(3,4,1)\}$，
$\{(1,3,4),(4,2,3),(3,1,2),(2,4,1)\}$，
$\{(1,3,2),(2,4,3),(3,1,4),(4,2,1)\}$，
$\{(1,4,3),(3,2,4),(4,1,2),(2,3,1)\}$，
$\{(1,4,2),(2,3,4),(4,1,3),(3,2,1)\}$，

而 $LOTS(4)$ 可以由這兩個 $MTS(4)$ 及六個 $TTS(4)$ 合在一起，也可以由下列的八個 $OTS(4)$ 組成：

$\{(1,2,3),(2,4,1),(3,4,2),\langle 1,4,3\rangle\}$，
$\{(1,4,2),(2,1,3),(3,4,1),\langle 2,4,3\rangle\}$，
$\{(1,2,4),(2,3,1),(4,3,2),\langle 1,3,4\rangle\}$，
$\{(1,4,3),(3,2,4),(4,2,1),\langle 1,2,3\rangle\}$，
$\{(1,3,2),(2,1,4),(4,3,1),\langle 2,3,4\rangle\}$，
$\{(2,4,3),(3,1,4),(4,1,2),\langle 1,3,2\rangle\}$，
$\{(1,3,4),(3,2,1),(4,2,3),\langle 1,2,4\rangle\}$，
$\{(2,3,4),(3,1,2),(4,1,3),\langle 1,4,2\rangle\}$，

後七個 $OTS(4)$ 是由第一個 $OTS(4)$ 分別通過置換 (12)，(34)，(24)，$(12)(34)$，(124)，(234)，(1234) 而得到的。

解決$LMTS$和$LTTS$（以至$LOTS$）構造問題的總體思路大致是一樣的：

(1)給出全部奇數階（即$v\equiv 1,3 \pmod 6$）的直接構造；

(2)對$n\equiv \pm 1 \pmod 6$給出$v+2\rightarrow nv+2$遞歸構造；

(3)給出2^n+2階的直接構造；

(4)最後，對任意的階數$v\equiv 0,1 \pmod 3$，可以寫爲$v=2^n u+2$，$u\equiv \pm 1 \pmod 6$。若$n=0$，則由(1)存在v階大集；若$n>0$，由(3)存在2^n+2階構造，從而由(2)得到v階構造。

對於(1)，有兩個途徑。首先，可以從$LSTS(v)=\{(X,\mathscr{P}_i);1\leqslant i\leqslant v-2\}$如下轉變得到$LMTS(v)=\{X,\mathscr{B}_i);1\leqslant i\leqslant v-2\}$及$LTTS(v)=\{(X,\mathscr{C}_i^j);1\leqslant i\leqslant v-2,1\leqslant j\leqslant 3\}$：

$$\langle x,y,z\rangle,\langle x,z,y\rangle\in\mathscr{B}_i,\quad 若\{x,y,z\}\in\mathscr{P}_i;$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y,z),(z,y,x)\in\mathscr{C}_i^1\\(x,z,y),(y,z,x)\in\mathscr{C}_i^2\\(y,x,z),(z,x,y)\in\mathscr{C}_i^3\end{array}\right\}若\{x,y,z\}\in\mathscr{P}_i$$

注意到對任意的$v\equiv 1,3 \pmod 6$，$v\neq 7$均存在有$LSTS(v)$，所以只須再直接給出$LMTS(7)$和$LTTS(7)$，即可完成(1)的任務，這是已經解決了的。

解決(1)的另一個途徑是撇開$LSTS(v)$而去直接構造。這樣做的理由，一是爲了得到不平庸的（更具有MTS及TTS本身特徵的）構造，再是因爲當時$LSTS(v)$的存在性問題還未徹底解決。這一途徑中$LTTS$的構造是由C.C.Lindner給出的；而$LMTS$的構造是由我們（筆者與其學生常彥勛）給出的：

取$a,b\notin \boldsymbol{Z}_{v-2}$，則如下的$v-2$個三元系$\mathscr{B}_i$（$i\in Z_{v-2}$）構成集合$\{a,b\}\cup\boldsymbol{Z}_{v-2}$上的一個$LMTS(v)$：

(i) $\langle a,b,i\rangle,\langle b,a,i\rangle$

(ii) $\langle a,x+i,-2x+i\rangle$,
$\langle b,-2x+i,x+i\rangle$
（$x\in\boldsymbol{Z}_{v-2}\setminus\{0\}$）

(iii) $\langle x+i,y+i,z+i\rangle$,
$\langle x+i,z+i,y+i\rangle$
（$x<y<z$且$x+y+z\equiv 0 \bmod (v-2)$）。

對於(2)的遞歸構造，C.C. Lindner首先於1987年給出了$LTTS$的方法。而$LMTS$的方法是1988年同時由兩對作者分別獨立完成的—— L. Teirlinck和C.C. Lindner以及我們。

(3)的難度較大，1989年初，筆者提出了所謂「對子類」和「三元組類」的概念，將$LMTS(2^n+2)$的構造問題轉化爲2^n階的有限域中一類三數組構成的因子關連圖的結構分析，從而首先給出了$LMTS(2^n+2)$，$n\geqslant 3$的直接構造。一年後，我們又利用一種準對稱的$LTTS(18)$給出了$LTTS(v+2)\rightarrow LTTS(16v+2)$的遞歸方法，從而以一些已知的小階數構造爲基礎證明了$LTTS(2^n+2)$的存在性。

至此，按照上述(4)的邏輯，$LTTS(v)$對任$v\equiv 0,1 \pmod 3$的存在性問題即可宣告解決。同時，根據這一結果及$LMTS(v)$的有關構造，常彥勛亦證明了$LOTS(v)$對任意$v\equiv 0,1 \pmod 3$的存在性。但$LMTS(v)$的存在性還不能徹底解決，關鍵在於不存在$LMTS(2^2+2)$（因爲$MTS(6)$不存在），這樣對於(2)就缺少了一個$v+2\rightarrow 4v+2$的遞歸結論。

C.C. Lindner還曾給出過$LMTS(v)\rightarrow LMTS(3v)$及$LMTS(v+1)\rightarrow LMTS(3v+1)$的遞歸構造（原構造有一些疏誤，筆者已經作了修正）。最近，我們又利用陸家家羲提出的輔助設計LD（它的存在性已被我們基本解決）給出了一定條件下$v+2\rightarrow 3v$及$v+2\rightarrow 3v+1$的遞歸構造。按照上述一系

列的結果，$LMTS(v)$ 的未知階數已只剩下很小的範圍（當然還是無窮多，但主要約束在 $v=216k+6$ 及 $v=72k+22$ 的一部分中），比如在 $v\leqslant 2000$ 內，只剩下以下的 13 個階數：78, 166, 438, 654, 958, 1086, 1174, 1246, 1518, 1606, 1734, 和 1950 。

四、其它的區組設計大集

前邊提到的Mendelsohn 系設計$M[k,\lambda;v]$，當 $k=3$，$\lambda=1$ 時，其大集研究雖尚未結束但已如上節所述有了相當進展。但對 $k>3$ 的情形，不僅大集研究剛起步，即使$M[k,1;v]$本身的存在性也還未能對所有的 k 給出結論。筆者在 1989 年對 v，k 值相等或差 1 的一些 $M[k,1;v]$ 的大集給出了構造，它們是 $LM[2t+1,1;2t+1]$，$LM[2t,1;2t+1]$ 和 $LM[2t+1,1,2t+2]$，這裡 $LM[k,\lambda;v]$ 表示$M[k,\lambda;v]$的大集。

不難算出，一個$M[k,1;v]$包含有 $\frac{v(v-1)}{k}$ 個 k-循環區組。而因v元集可組成總共$\frac{v(v-1)\cdots(v-k+1)}{k}$個 k-循環區組，所以一個$LM\{k,1;v]$應由$(v-2)\cdots(v-k+1)$個兩兩不相交的$M[k,1;v]$組成。J.C. Bermond，V. Faber 和 D. Sotteau 已經證明了，對 $v\equiv 0$ 或 $1 \pmod{k}$ 存在有$M[k,1;v]$。這樣，對於我們所考慮的 $v=k$ 或 $v=k+1$，$LM[k,1;v]$就應當由$(v-2)!$ 個$M[k,1;v]$來組成了。

為了拋磚引玉（因為LM的研究剛開始），我們在這裡介紹一下所給三類構造之一 $LM[2t+1,1;2t+2]$ 的做法。構造本身並不繁複，但證明需要用到對稱群，陪集與代表系及設計的完全自同構群等。

令 $Z_{2t+1}=\{0,1,\cdots\cdots,2t\}$，$\infty\notin Z_{2t+1}$，如下給出的$B_j$（$0\leqslant j\leqslant(2t)!-1$）即是集合 $\{\infty\}\cup Z_{2t+1}$ 上的一個$LM[2t+1,1;2t+2]$：

$\mathscr{B}_0$ 由 $2t+2$ 個區組構成：

$$B_i=\langle\infty,b_{i0},b_{i1},\cdots\cdots,b_{i,2t-1}\rangle,\quad i\in Z_{2t+1}$$

$$C=\langle 0,t+1,1,t+2,2,\cdots,2t,t\rangle$$

其中 $b_{i,2s}=i+s \quad (0\leqslant s\leqslant t-1)$

$$b_{i,2s+1}=\begin{cases} i-s-1 & (0\leqslant s\leqslant[\frac{t}{2}]-1)\\ i-s-2 & ([\frac{t}{2}]\leqslant s\leqslant t-1)\end{cases}$$

$\mathscr{B}_j=\mathscr{B}_0\xi_j$，其中$\xi_j\in Sym(Z_{2t+1}\setminus\{0\})$（即集合$Z_{2t+1}\setminus\{0\}$上的對稱群），而$\mathscr{B}_0\xi_j$為$\mathscr{B}_0$每個區組經置換$\xi_j$後所得區組的全體。

例如，對 $t=2$，我們有

$$\mathscr{B}_0:\quad \begin{aligned} B_0&=\langle\infty,0,4,1,2\rangle\\ B_1&=\langle\infty,1,0,2,3\rangle\\ B_2&=\langle\infty,2,1,3,4\rangle\\ B_3&=\langle\infty,3,2,4,0\rangle\\ B_4&=\langle\infty,4,3,0,1\rangle\\ C&=\langle 0,3,1,4,2\rangle\end{aligned}$$

$$\mathscr{B}_j=\mathscr{B}_0\xi_j,\quad \xi_j\in Sym(\{1,2,3,4\})\quad 0\leqslant j\leqslant 23$$

這裡 $Sym(\{1,2,3,4\})$ 的 24 個置換是 (1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)，以 $\xi_j=(12)(34)$為例，我們有相應的$\mathscr{B}_j$是

$$\begin{aligned} B_0\xi_j&=\langle\infty,0,3,2,1\rangle\\ B_1\xi_j&=\langle\infty,2,0,1,4\rangle\\ B_2\xi_j&=\langle\infty,1,2,4,3\rangle\\ B_3\xi_j&=\langle\infty,4,1,3,0\rangle\\ B_4\xi_j&=\langle\infty,3,4,0,2\rangle\\ C\xi_j&=\langle 0,4,2,3,1\rangle\end{aligned}$$

下邊我們來看一看，可分組設計（即

GDD)。它是一個$(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$,其中$X$是元素集,$\mathscr{A}$是區組集,而$\mathscr{G}=\{G_1,G_2,\cdots\cdots,G_S\}$是組集合,常稱多重集$\{|G_1|,|G_2|,\cdots\cdots,|G_S|\}$為此$GDD$的型,並簡記為$1^{u_1}2^{u_2}\cdots$,亦即這個多重集中有$u_1$個1,$u_2$個2,……。若$\mathscr{A}$的區組長度為$k$,則記此$GDD$為$k$–$GDD(1^{u_2}2^{u_2}\cdots\cdots)$。

最近,D.R. Stinson,C.C. Lindner 和蘇州大學朱烈教授的學生陳德猛等對GDD的大集做了一些開創性的工作。他們主要着手的是$3-GDD(t^u)$這種最簡單類型的大集,被記為$LS(t^u)$。易知,一個$LS(t^u)$由$t(u-2)$個$3-GDD(t^u)$組成,而每個$3-GDD(t^u)$包含u個t長組和$\dfrac{u(u-1)}{6}t^2$個長度為3的區組(無序的)。已經知道

$3-GDD(t^u)$存在

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}u(u-1)t^2\equiv 0 \pmod 6\\(u-1)t\equiv 0 \pmod 2\end{cases}$$

所以,$LS(t^u)$的存在性可分以下幾類討論:

(1) $t\equiv 1,5 \pmod 6$,
$u\equiv 1,3 \pmod 6$;

(2) $t\equiv 2,4 \pmod 6$,
$u\equiv 0,1 \pmod 3$;

(3) $t\equiv 0 \pmod 6$,u任意;

(4) $t\equiv 3 \pmod 6$,u奇。

他們的工作依舊是以直接法和遞歸法為手段,所給出的主要遞歸定理是

$t^u\rightarrow(kt)^u$,對任意正整數k;

$2^{u+1}\rightarrow 2^{3u+1}$,對$u\neq 2,6$;

$t^6,t^{2u}\rightarrow t^{6u}$,對$u\neq 2,6$;

$t^{u-1}\rightarrow t^{2u-1}$,對$t=3,6$且$u\geqslant 6$偶;

$t^{u+2}\rightarrow t^{uv+2}$,若$t(u+1)$偶且存在某種特殊的$LSTS(v+2)$;

$t^{u+2}\rightarrow t^{uv+2}$,對$t$偶及$v\equiv\pm 1 \pmod 6$)

所直接給出的較小的$LS(t^u)$的型是2^4,2^6,2^7,3^5,3^7以及1^u($u\equiv 1,3 \bmod 6, u\neq 7$)。其中最後一類即是根據$LSTS(u)$的存在性得來的,因為$3-GDD(1^u)$即是$STS(u)$。

根據這些定理和初值,經過論證,以上各類情況尚遺留下來的待進一步研究的是

(1) $u=7$;

(2) $u\equiv 130$和$258 \pmod{384}$;

(3) $u\equiv 2 \pmod 6$,$u\equiv 11 \pmod{18}$,
$u\equiv 130,258 \pmod{384}$;

(4) $u\equiv 5 \pmod 6$。

顯然,即使對於這種最簡單的型,$3-GDD$的大集問題都還有許多問題要做,GDD大集的一般情況當然更有大片處女地在等待開墾。

這裡我們給出$LS(t^u)$的兩個小結果作為例子,第一個是$LS(2^4)$,它由4個$3-GDD(2^4)$組成,每個GDD由8個3元組構成如下:

1 3 5	1 3 6	1 3 7	1 3 8
1 4 7	1 4 8	1 4 6	1 4 5
1 6 8	1 5 7	1 5 8	1 6 7
2 3 8	2 3 7	2 3 5	2 3 6
2 4 6	2 4 5	2 4 8	2 4 7
2 5 7	2 6 8	2 6 7	2 5 8
3 6 7	3 5 8	3 6 8	3 5 7
4 5 8	4 6 7	4 5 7	4 6 8

顯然這裡我們給定的組集合應當是$\{1,2\}$,$\{3,4\}$,$\{5,6\}$和$\{7,8\}$。

第二個例子是$LS(3^5)$,它由9個$3-GDD(3^5)$組成,分別記為$(X,\mathscr{G},\mathscr{A}_j)$,$j=1,2,\cdots\cdots,9$,每個$\mathscr{A}_j$包含30個三元組。這裡元素集$X=\{1,2,3,4,5\}\times Z_3$,組集合$\mathscr{G}=\{G_1,G_2,\cdots\cdots,G_5\}$,其中$G_i=\{i\}\times Z_3$。為方便,以下將$X$的每個元$(i,k)$簡記為$i_k$,而每個三元組$\{a_l,b_m,c_n\}$與一個上標序組$(a,b,c)$和一個下標組$[l,m,n]$相對應,注意到下標組$[l,m,n]$共有27個,我們將它們分九組記為(諸$k$均取遍$Z_3$,即每個$\sigma_S$代表3個下標組):

$\sigma_1=[k,k,k]$,

$\sigma_2=[k,k,k+1]$,

$\sigma_3=[k, k+1, k]$,

$\sigma_4=[k+1, k, k]$,

$\sigma_5=[k, k, k-1]$,

$\sigma_6=[k, k-1, k]$,

$\sigma_7=[k-1, k, k]$,

$\sigma_8=[k-1, k, k+1]$,

$\sigma_9=[k-1, k+1, k]$。

我們所給出的諸 A_j 的區組如下表所示：

(a,b,c) \ $\mathscr{A}_j$	$\mathscr{A}_1$	$\mathscr{A}_2$	$\mathscr{A}_3$	$\mathscr{A}_4$	$\mathscr{A}_5$	$\mathscr{A}_6$	$\mathscr{A}_7$	$\mathscr{A}_8$	$\mathscr{A}_9$
(1,2,3)	σ_1	σ_2	σ_5	σ_3	σ_7	σ_8	σ_6	σ_9	σ_4
(1,2,4)	σ_7	σ_4	σ_3	σ_6	σ_5	σ_9	σ_2	σ_8	σ_1
(1,2,5)	σ_4	σ_7	σ_9	σ_1	σ_6	σ_2	σ_8	σ_5	σ_3
(1,3,4)	σ_4	σ_1	σ_2	σ_7	σ_6	σ_5	σ_3	σ_9	σ_8
(1,3,5)	σ_7	σ_4	σ_8	σ_9	σ_5	σ_3	σ_6	σ_1	σ_2
(1,4,5)	σ_1	σ_3	σ_6	σ_4	σ_7	σ_5	σ_9	σ_2	σ_8
(2,3,4)	σ_8	σ_9	σ_3	σ_5	σ_7	σ_2	σ_6	σ_1	σ_4
(2,3,5)	σ_9	σ_2	σ_1	σ_8	σ_6	σ_4	σ_5	σ_3	σ_7
(2,4,5)	σ_8	σ_4	σ_7	σ_2	σ_5	σ_1	σ_6	σ_9	σ_3
(3,4,5)	σ_9	σ_8	σ_5	σ_3	σ_6	σ_2	σ_1	σ_7	σ_4

比如 $\mathscr{A}_1$ 的 30 個區組就是

$\{1_k, 2_k, 3_k\}$，$\{1_{k-1}, 2_k, 4_k\}$，

$\{1_{k+1}, 2_k, 5_k\}$，$\{1_{k+1}, 3_k, 4_k\}$，

$\{1_{k-1}, 3_k, 5_k\}$，$\{1_k, 4_k, 5_k\}$，

$\{2_{k-1}, 3_k, 4_{k+1}\}$，$\{2_{k-1}, 3_{k+1}, 5_k\}$，

$\{2_{k-1}, 4_k, 5_{k+1}\}$，$\{3_{k-1}, 4_{k+1}, 5_k\}$，

其中 $k\in\mathbf{Z}_3$，很易說明 $\mathscr{A}_1$ 確爲一個 $3-GDD(3^5)$，讀者亦不難驗證以上所給的 $LS(3^5)$ 是正確的。

近年來，區組設計的大集問題研究較活躍，除了上述幾類外，還有 $k=3$，$\lambda=1$ 之外的 $B[k, \lambda; v]$ 大集研究，t-設計（它是 BIB 設計的推廣，$BIBD$ 從而可稱爲 2-設計）大集的研究以及所謂閫模式問題等等。限于篇幅，本文不再一一介紹。總之，形形色色的區組設計有許多已開始或未開始的大集問題等待着人們去研究和開拓。筆者呈獻本文的目的即在於激起衆多有志者的興趣，從而投身於這一攻堅的行列。當然，採摘誘人的數學碩果是幸福的，但披荊斬棘的艱辛又是不可低估的，願辛勞的汗雨和不懈的拼搏賜給你成功與幸運！

參考文獻

1. Lu Jiaxi, On large sets of disjoint Steiner triple systems I-VI, *J. Combin. Theory* (A) 34 (1983), p. 140～182 and 37 (1984), p. 136～192.
2. L. Teirlinck, On the maximum number of disjoint Steiner triple systems, *Discrete Math.* 6 (1973), 299～300.
3. A. Rosa, A theorem on the maximum number of disjoint Steiner triple systems, *J. Combin. Theory* (A) 18 (1975), p. 305～312.
4. N. S. Mendelsohn, A natural generalization of Steiner triple systems, *Computers in Number Theory*, 323～338, Academic Press, New York, 1971.
5. R. H. F. Denniston, Some packing with Steiner triple systems, Discrete Math. 9 (1974), 213～227.
6. C. C. Lindner, On the number of disjoint Mendelsohn triple systems, *J. Combin. Theory* (A) 30 (1981), 326～330.
7. L. Teirlinck & C. C. Lindner, The construction of large sets of idempotent quasigroups, *European J.*

Combin. 9 (1983), 83 ~ 89.

8. Kang Qingde & Chang Yanxun, Symmetric Mendelsohn triple systems and large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, *Combinatorial Designs and Applications* (Vol. 126 of 'Lecture notes in pure and applied math.'), 1990, 69 ~ 78.

9. Kang Qingde, The construction of the large sets of disjoint Mendelsohn triple systems of order 2^n+2, Chinese Science Bulletin, Vol.34, No.14 (1989), 1041 ~ 1044.

10. Kang Qingde. A generalization of Mendelsohn triple systems, *Ars Combinatoria*, 29C (1990), 207 ~ 215.

11. C. C. Lindner & A. P. Street, Construction of large sets of pairwise disjoint transitive triple systems, *European J. Combin.* 4 (1983), 335 ~ 346.

12. C. C. Lindner, Construction of large sets of pairwise disjoint transitive triple systems (II), *Discrete Math.*, 65 (1987), 65 ~ 74.

13. Kang Qingde, *On large sets of block designs*, Ph. D. Thesis, Eindhoven Univ. of Techn., The Netherlands.

14. Bays S., Use question de Cayley relative au probléme des triades steiner, *Enseignement Math.*, 19 (1917), 57 ~ 67.

15. Kramar E. S. & Mesner D. M., The possible (impossible) system of 11 disjoint S(2, 3, 13)'*S* (*S*(3, 4, 14)'*S*) with automorphism of order 11, *Utilitas Math.*, 7 (1975), 55 ~ 58.

16. Kang Qingde & Chang Yanxun, Futher results about large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, *Chinese Science Bulletin*, 1991.

17. Kang Qingde & Chang Yanxun, Futher results about large sets of disjoint Mendelsohn triple systems (II), to appear.

18. Chang Yanxun & Kang Qingde, On the large sets of pairwise disjoint transitive triple systems, *Chinese Science Bulletin*, 1991.

19. Kang Qingde & Chang Yanxun, A completion of the spectrum for large sets of disjoint transitive triple systems, *Chinese Sinica* (A), No.4 (1991), 337 ~ 342.

20. L. Teirlinck, On large sets of disjoint ordered designs, *Ars Combin.* 25 (1988), 31 ~ 37.

21. Chang Yanxun, A completion of the spectrum for large sets of disjoint ordered triple systems, to appear.

22. D. Chen & D.R. Stinson, On the construction of large sets of disjoint group-divisible designs, preprint.

23. D. Chen & D. R. Stinson, More constructions for large sets of disjoint GDDs, preprint.

——本文作者任教於中國大陸河北師範學院數學系——