陌城仙踪

——簡介強正則圖型

黃大原

一、楔　子

陌城(Madison)連日風雪，地凍天寒，蝸居終日。偶拾隆華兄弟最愛之格林全集，童心不泯之餘讀之，甚覺有趣，遂不知所止。倏忽之間，但見白雪公主與七小福欣欣然迎面而來。憶昔公主邀宴事(見數播十卷一期)猶覺有趣。此番老友重逢，自是有緣，遂相偕同遊夢到她湖(Lake Mendota)。

湖畔鳥語花香，彩蝶飛舞，甚是賞心悅目。展望湖面，但見蓮座羅布其間不知凡幾，蓮花仙子穿梭其間，但覺井然有致，佇足稍久，察知蓮座間或有仙踪或無仙踪，却不得其竅，但知任意兩蓮座間，皆有唯一的第三蓮座，與該兩蓮座間各現仙踪。這仙踪究竟如何？白雪公主嫣然一笑，似是胸有成竹。七小福卻是面面相覷，不知所以，衆曰：願聞其詳。

黃某嘆為觀止之餘，不敢獨享，是為之記。

二、策　略

本文擬透過「圖型」(graph)模式(見第三節)，就前述「仙踪問題」提供解決之道，茲略述要點如次。

1. 根據扼要的計數(Counting)，知悉該圖型或為「正則」，或為圖一所示之特定型式。

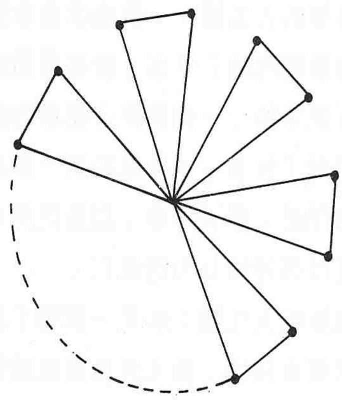
2. 設法排除正則的可能性(除非蓮座數為1或3)。茲假設該仙踪為一正則圖型，

(i) 用「鄰接(adjacent)矩陣」來描述該圖型，且以二次矩陣方程式表示其特點(見第五節第3式)。

(ii) 就前述矩陣考察其「質譜」(spectrum)(見第五節)。

(iii) 根據前述質譜分析，獲致矛盾的結論(見第五節末)，因而排除正則的可能性(除非蓮座數為1或3)。

3. 結論：仙踪必如圖一所示。

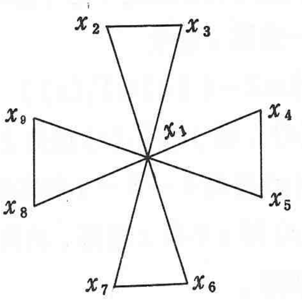


圖一

三、建立圖型模式

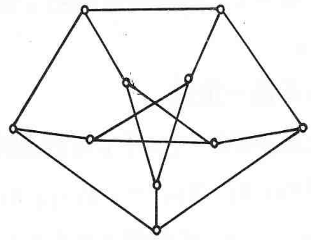
設湖上有 v 個蓮座，表爲 Z。兩相異蓮座 x 和 y 間，若現仙踪，則記之爲 $x\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ y$（並稱 x 和 y 兩點相鄰接），若無仙踪，則逕以 $x\circ\quad\circ y$ 表示。令 E 表所有出現仙踪的（無序）蓮座對（unordered pair）；亦即 $E\subseteq\binom{Z}{2}$，$\{x,y\}\in E$ 若且唯若 $x\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ y$（此處 $\binom{Z}{2}$ 表示 Z 之所有 2 個元素子集合族）。通常稱此模式 (Z,E) 爲一「圖型」（graph）並記之爲 $\Gamma=(Z,E)$。Z 裡的元素稱爲該圖型 Γ 的「點」（vertices），而 E 裡的元素稱爲該圖型 Γ 的「邊」（edges）。若 $x\in V$，令 $\Gamma_1(x)$ 爲 x 的鄰域（即所有與 x 相鄰接點所成之集合），並稱 $\Gamma_1(x)$ 所含的元素數爲點 x 的度數（degree），記爲 $\deg(x)$。若諸點有一共同的度數 k，則稱該圖型爲 k－正則（k-regular）或逕稱正則。

例如圖二就是 $v=9$ 的例子，$X=\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_9\}$，$E=\{\{x_1,x_i\}\mid 2\le i\le 9\}\cup\{\{x_{2i},x_{2i+1}\}\mid 1\le i\le 4\}$。



圖二

再如圖三亦爲圖型之例（文獻上稱爲 Petersen 圖型）。



圖三

到目前爲止，但知有一滿足性質

（SR1） 對任意相異 $x,y\in Z$，有唯一 $z\in Z$ 使呈 $\underset{x}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{z}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{y}{\circ}$ 的圖型，餘如 v 值若干，$E\subseteq\binom{Z}{2}$ 又是如何，均仍一無所知。前述兩例，圖二合於性質（SR1），圖三則否。但圖三另有其獨到之處留待讀友自行考察。

四、計數 (Counting) 運用之一例

請從各點的度數着手。令 $x,y\in Z$ 爲不相鄰的兩點，根據性質（SR1），令

$$\Gamma_1(x)\cap\Gamma_1(y)=\{z\},$$
$$\Gamma_1(x)\cap\Gamma_1(z)=\{a\},$$
$$\Gamma_1(y)\cap\Gamma_1(z)=\{b\}.$$

（式中 x,y,z,a,b 諸點，兩兩互異）。再令

$$A=\Gamma_1(x)-\{a,z\},$$
$$B=\Gamma_1(y)-\{b,z\}.$$

A 和 B 之間可有關聯？若 $A\neq\phi$，令 $u\in A$，則 u 不與 b,y,z 相鄰（如 u 與 z 爲鄰，則 x,z 有 u,a 兩共鄰，不可。餘同）但 u 與 y 有唯一共鄰，故 $B\neq\phi$，且 u 必與 B 中之唯一點相鄰。同理若 $B\neq\phi$，則 $A\neq\phi$，且 B 中各點在 A 中有唯一對應之點與其相鄰。因此 A,B 間有一一對應關係（含 $A=B=\phi$ 之情形），得 $|A|=|B|$，再得 $\deg(x)=|A|+2=|B|+2=\deg(y)$。茲列前述考察爲引理。

引理：若 x，y 爲不相鄰兩點，則 $\deg(x)=\deg(y)$。

令 $x\in Z$ 爲一定點。

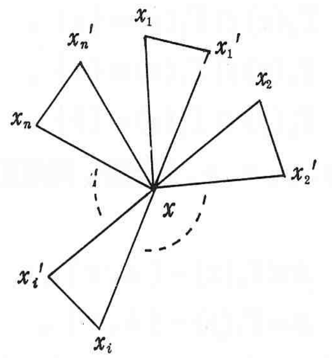
若對任意 $y\in Z-\{x\}$，可找到序列

$(*)$ $(x=)x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{l-1}, x_l(=y)$

式中 x_{i-1}，x_i 不相鄰 $1\leq i\leq l$。

如前述引理所示，得 $\deg(x)=\deg(y)$，因此 $\Gamma=(Z,E)$ 爲一正則圖型。

若不然，取 $R\subsetneqq Z$ 爲一含 x 且具上述性質 $(*)$ 的「最大」子集合，再令 $S=Z-R(\neq\phi)$。根據 R 是最大的取法，S 中元素與 R 中元素兩兩相鄰。如 $|R|\geq 2$，且 $|S|\geqslant 2$，令 a，$b\in R$，c，$d\in S$，則 a，b 兩點有 c，d 兩共鄰，此有違性質（SR1）。故 $|S|=1$ 或 $|R|=1$。設若 $R=\{x\}$，則 x 與 $Z-\{x\}$ 中諸點相鄰。令 $x_1\in Z-\{x\}$，則 x_1 必與 $Z-\{x, x_1\}$ 裡的唯一點 x_1' 相鄰。若有 $x_2\in Z-\{x, x_1, x_1'\}$，則 x_2 亦與 $Z-\{x, x_1, x_1', x_2\}$ 裡的某點 x_2' 相鄰，……，循序配對下去，根據性質（SR1），Γ 必呈



之型。諸君必然同意前述圖型爲可能的仙踪之一。若 $|S|=1$，則 Γ 亦必呈上型，此留待讀友自行驗證。

可有其它的仙踪？當從有無既是正則兼又滿足性質（SR1）的圖型着手。設 $\Gamma=(Z,E)$ 爲其一例，試重述其性質如次：

$$|\Gamma_1(x)\cap\Gamma_1(y)|=\begin{cases} k & \text{若 } x=y\in Z, \\ 1 & \text{若 } x, y\in Z \text{ 相鄰}, \\ 1 & \text{若 } x, y\in Z \text{ 不鄰}, \end{cases}$$

式中 k 表示諸點的共同度數。

正是山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村。一行來到了「強正則圖型」（strongly regular graphs）這一村。

五、強正則圖型 (strongly regular graphs)

在這一節裡，擬稍稍擴大視界，所考慮的圖型固不必局限於第二節裡所建立的仙踪圖型模式。

若圖型 $\Gamma=(Z,E)$ 有 v 個點（$|Z|=v$），且滿足下列性質

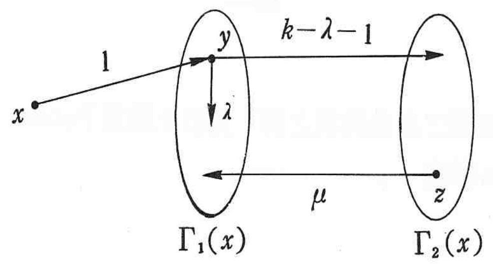
(SR)
$$|\Gamma_1(x)\cap\Gamma_1(y)|=\begin{cases} k & \text{若 } x=y\in Z \\ \lambda & \text{若 } x, y\in Z \text{ 相鄰} \\ \mu & \text{若 } x, y\in Z \text{ 不鄰} \end{cases}$$

文獻上稱 $\Gamma=(X,E)$ 爲一「強圖型正則」，並記之爲 $SR(v, k, \lambda, \mu)$，例如 Petersen 圖型（圖三）就是 $SR(10, 3, 0, 1)$ 之例，請由讀友自行驗證，並試舉出它例。上節末所提仙踪問題正是 $SR(v, k, 1, 1)$ 存在否的問題。

諸君或已察覺 v，k，λ，μ 諸參數間或有某些關聯，例如必無 $(k, \lambda, \mu)=(5, 1, 2)$ 的強正則圖型，何以致之？茲考察如次：令 $x\in Z$ 爲一定點，並令

$\Gamma_2(x)=Z-(\{x\}\cup\Gamma_1(x))$

若 $y\in\Gamma_1(x)$，則 y 與 $\Gamma_1(x)$ 裡的 λ 個點相鄰，並與 $\Gamma_2(x)$ 裡的 $k-\lambda-1$ 個點相鄰。反之若 $z\in\Gamma_2(x)$ 則 z 不與 x 相鄰，但與 $\Gamma_1(x)$ 裡的 μ 個點相鄰。



因此，跨於$\Gamma_1(x)$，$\Gamma_2(x)$間的邊數爲

$$k(k-\lambda-1)=|\Gamma_2(x)|\cdot\mu \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

得 $|\Gamma_2(x)|=k(k-\lambda-1)/\mu$

爲一正整數，及

$$v=1+k+k(k-\lambda-1)/\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

（這又是一計數之例）。在前述$(k,\lambda,\mu)=(5,1,2)$時，$|\Gamma_2(x)|=5.3/2$不爲一整數，是以必無$SR(v,5,1,2)$存在。但在$(\lambda,\mu)=(1,1)$的仙踪問題裡，前述考察仍未能帶來任何存在否的信息。更深入的考察勢不可免。

試以一個對稱的（0，1）矩陣來表示一個圖型，期盼性質（SR）可藉由該矩陣來表達，更期盼其能扮演橋樑的角色，使得線性代數的知識有助於問題之解決。

令A爲一v階方陣（$|Z|=v$），諸列（row），諸行（column）均以Z中元素名之，

$$A(x,y)=\begin{cases}0 & \text{若 } x,y \text{ 不相鄰或 } x=y,\\ 1 & \text{若 } x,y \text{ 相鄰},\end{cases}$$

式中$A(x,y)$表示矩陣A位於x－列，y－行位置上的分量。此矩陣A稱爲圖型$\Gamma=(Z,E)$的一「鄰接矩陣」（adjacency matrix）。易見A爲v階對稱（0，1）－方陣，且對角線上諸元爲0。

令$A^2=A\cdot A$，$A^2(x,y)$表矩陣A^2在x-列，y－行位置上的分量。$A(x,y)$告知x，y兩點相鄰否，$A^2(x,y)$以何見告？由$A^2(x,y)=\sum_{z\in Z}A(x,z)\cdot A(z,y)=|\Gamma_1(x)\cap\Gamma_2(y)|$，得

引理：

$$A^2(x,y)=\begin{cases}k & \text{若 } x=y\in Z,\\ \lambda & \text{若 } x,y\in Z \text{ 相鄰},\\ \mu & \text{若 } x,y\in Z \text{ 不相鄰},\end{cases}$$

令I表v階單位方陣（identity matrix），J表諸分量全爲1的v階方陣。根據前述引理，$\Gamma=(X,E)$的（SR）性質，可由下面兩個矩陣方程式表達：

引理：

$$\left.\begin{aligned}&AJ=JA=kJ\\&A^2+(\mu-\lambda)A+(\mu-k)I=\mu J\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

此刻，強正則圖型和線性代數間之橋樑已建妥，請以此爲出發點，試作進一步之分析。茲考察鄰接矩陣A的固有值（eigen values）及其重根數（multiplicities）。首先由正則性質$AJ=JA=kJ$，得$A\cdot[1,1,\cdots\cdots1]^t=k\cdot[1,1,\cdots,1]^t$，亦即共同度數$k$爲$A$的一個固有值，並以$[1,\cdots\cdots1]^t$爲其對應之固有向量。再令$\theta(\neq k)$爲其它的固有值，且以$\omega(\neq0)$爲其對應的固有向量，即$A\omega=\theta\omega$，得$A^2\omega=A(A\omega)=\theta^2\omega$，因$AJ\omega=J(A\omega)=\theta(J\omega)$，又因$AJ\omega=(kJ)\omega=k(J\omega)$，$k\neq\theta$，得$J\omega=0$，分别代入(3)式$(A^2+(\mu-\lambda)A+(\mu-k)I)\omega=\mu I\omega$，得二次整係數方程式

$$\theta^2+(\mu-\lambda)\theta+(\mu-k)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

令其二根爲r，s，得

$$\left.\begin{aligned}&r+s=\lambda-\mu\\&r\cdot s=\mu-k\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

因$r\cdot s=\mu-k\leq0$，r，s不能同爲正數或同爲負數。又若$r=s=0$，導致$\lambda=\mu=k$，$k(k-\lambda-1)/\mu<0$此與$k(k-\lambda-1)/\mu$爲一正整數相違。因此，Γ有三互異之固有值，分別是k（共同度數），r，s（取$k,r\geqslant0$，$s<0$）。

其次，分別考察三固有值之重根數，看是否能以k,λ,μ諸參數表之，再根據其必爲正整數之性質，決定k,λ,μ之間的一些必要條件。

設$A[\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_v]^t=k[\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_v]$，且令$|\alpha_{i_0}|\geqslant|\alpha_i|$對所有的$i$均成立，則由$\sum_{x_j\in\Gamma(x_{i_0})}\alpha_j=k\alpha_{i_0}$，得

$$k|\alpha_{i_0}|=\Big|\sum_{x_j\in\Gamma_1(x_{i_0})}\alpha_j\Big|\leq\sum_{x_j\in\Gamma(x_{i_0})}|\alpha_j|$$

$$\leq k|\alpha_{i_0}|$$

是以 $\alpha_{i_0}=\alpha_j$ 對所有 $x_j\in\Gamma_1(x_{i_0})$ 均能成立，若 $x_l\in\Gamma_2(x_{i_0})$，且 $x_j\in\Gamma_1(x_{i_0})$ 與 x_l 相鄰，同上理可得 $\alpha_{i_0}=\alpha_j=\alpha_l$，由是〔$\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_v$〕$=\alpha_{i_0}$〔1，1，……，1〕。這正好說明固有值 k 所對應的固有空間爲由向量〔1，1，……，1〕^{t} 所生成，亦即 k 的重根數爲 1 。

次論及固有值 r，s 的重根數。令 r，s 的重根數分別表爲 f，g，是以 f，g 均爲正整數，且 $1+f+g=v$（$=|Z|$）。因 A 爲對應（0，1）矩陣，可在實數系內使 A 對角化後呈

$$D=\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} k & & & & & & \\ \hline & r & & & & & \\ & & \ddots & & & 0 & \\ & & & r & & & \\ \hline & & 0 & & s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & s \end{array}\right]\begin{array}{l} \}\,1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}f \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}g \end{array}$$

是以 A 和 D 具相同的範跡（trace），得 $0=tr(A)=tr(D)=k+fr+gs$，根據(2)(5)諸式，

$$v=1+k+k(k-\lambda-1)/\mu$$
$$r\cdot s=\mu-k$$
$$r+s=\lambda-\mu$$

解方程式組

$$\begin{cases} 1+f+g=v \\ k+fr+gs=0 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

得

$$\begin{aligned} f&=(s+1)(k-s)k/\mu(s-r) \\ g&=v-1-f \end{aligned} \quad (7)$$

若兩重根數 f，g 不等，繼解方程式組

$$\begin{cases} r+s=\lambda-\mu \\ k+fr+gs=0 \end{cases}$$

得 $s=(f(\lambda-\mu)+k)/(f-g)$，

$r=\lambda-\mu-s$，

因式中 f，g，$\mu\geqslant 1$，$\lambda\geqslant 0$ 均爲整數，r，s 皆爲有理數。又因 $\theta^2+(\mu-\lambda)\theta+(\mu-k)=0$ 最高次項係數爲 1，故 r，s 爲整數。

如若兩重根數 f，g 相等時，由(6)得 $f=(v-1)/2$，因 $r+s=\lambda-\mu\leq 0$ 爲一整數，且 $f(r+s)=-k$，知 $r+s$ 必爲負整數。若 $r+s=0$，導致 $k=0$，不可。因此

$$r+s=-1,\quad f=k$$

或 $$r+s\leq -2,\quad f\leq k/2$$

兩者必居其一。若 $f=(v-1)/2\leq k/2$，得 $v-1\leq k$ 且 $\mu=0$，這顯示 Γ 中各點兩兩相鄰，不在考察之列。茲考察 $r+s=-1$ 且 $f=k$ 之情況，得 $(v-1)/2=k$ 及 $\lambda=\mu-1$。又因 $k(k-\mu+1-1)=\mu(2k+1-k-1)$（見式(1)），得 $k=2\mu$，是以 $(v,k,\lambda,\mu)=(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$。

請歸納前述討論得下列定理。

定理：令 Γ 爲一強正則圖型 $SR(v,k,\lambda,\mu)$，$\mu\geqslant 1$，則 Γ 具有三相異固有值 k，r，s，

(i) k 爲其共同度數，

$r=(\lambda-\mu+\sqrt{(\mu-\lambda)^2-4(\mu-k)})/2 \geqslant 0$

$s=(\lambda-\mu-\sqrt{(\mu-\lambda)^2-4(\mu-k)})/2 <0$。

(ii) k 的重根數爲 1，r 的重根數爲 $f=k(s+1)(k-s)/\mu(s-r)$，s 的重根數爲 $g=v-1-f$。

(iii) 若 $f\neq g$，則 r，s 均爲整數。

(iv) 若 $f=g$，則 $(v,k,\lambda,\mu)=(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$，反之亦然。

且回到第四節末關於正規仙踪存在否的問題，此刻，$\lambda=\mu=1$，$v=k^2+k+1$，若有距離正則圖型 $SR(v,k,1,1)$，則其兩固有值之重根數 f，g 必不等。因此

$$r=\sqrt{k-1}\geqslant 0,\quad s=-r$$

必爲兩整數。是以 $r^2=k-1$，且由式(7)

$$f=(-r+1)(r^2+1)(r^2+r+1)/-2r$$

爲一正整數。若 $r\geqslant 2$，f 的分子、分母分別爲奇數與偶數，與 $f\geqslant 1$ 爲一正整數相違。是以 $r=1$，但又導致 $f=0$，此亦與 $f\geqslant 1$ 爲一正整數之事實相違。如是，正則仙踪不可能存

在之事實已獲證實。

六、結論

這仙踪問題正是Erdös等人於1966年證得「友誼定理」〔5〕的化身，略謂在一社團裡，如任意兩會員有唯一之第三會員爲其共同的朋友，則有一會員會是所有其它會員之共同朋友。請以圖型理論模式重述如次：

友誼定理（Friendship Theorem）：

若Γ爲一有限圖型，且任意相異兩點有唯一的第三點與其相鄰，則Γ由一組有一公共頂點的三角形所組成（如圖一所示）。

源於統計的實驗設計〔6〕，R.C. Bose〔1〕於1963年首度提出「強正則圖型」這套模式。其後強正則圖型就自成一系，蓬勃發展，和其它的組合結構，如有限幾何（finite geometries）、區組設計（block designs）、編碼（coding）等，已發展出縱橫交錯的緊密關聯，可由〔2〕，〔3〕，〔4〕等文獻略見一二。

諸君請細思量幾則問題，以作爲本文的結束。令$Z=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$，以$\binom{Z}{k}$表示Z之所有k元子集合族（$1\le k\le n-1$）。在$\binom{Z}{k}$上可賦予一圖型結構$J(n,k)$如次：

$A,B\in\binom{Z}{k}$相鄰（adjacent），若且唯若$|A\cap B|=k-1$。

(1)考察圖型$J(5,2)$和Petersen圖型（圖二）的關聯（按$\binom{5}{2}=10$正是該圖型的點數）。

(2)考察圖型$J(7,3)$和$J(7,4)$間的關聯。

(3)考察圖型$J(n,2)$是否爲一強正則圖型？若然，請算出諸參數v,k,λ,μ之值。

(4)考察圖型$J(7,3)$是否爲強正則圖型？若不然，其故安在？性質SR是否可稍作調整，以迎合其特點？

參考文獻

1. R.C. Bose, Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs, *Pacific J. Math* (1963), 389～419.
2. A.E. Brower and J.H. van Lint, Strongly regular graphs and partial geometries, in "*Enumeration and Designs*", D.M. Jackson, and S.A. Vanstone ed., Academic Press, 1984.
3. P.J. Cameron, Strongly regular graphs, Chapter 12 in "*Selected Topics in Graph Theory I*", L.W. Beineke and R.J. Wilson ed., Academic Press, 1978.
4. P.J. Cameron and J.H. van Lint, *Graphs, Codes and Designs*, London Mathematics Society, Lecture Note Series, no. 43, 1980.
5. P. Erdös, A. Rényi and V.T. Sós, On a Problem of Graph theory, *Studia Sci. Math., Hungar*, (1966), 215～235.
6. *Construction and Combinatorial problems in designs of experiments*, D. Raghavarao, J. Wiley & Sons, New York, 1971.

（以上文獻均見於中研院數學所圖書室）

——本文作者任教於交通大學應數系——