

橋牌和離散數學

黃光明

1. 玩牌的孩子沒有笨的

你有孩子了嗎？在你開始擔心給孩子請什麼家教、進什麼補習班、買什麼課外讀物前，要不要考慮一個不花錢、孩子也不反抗的另一選擇？孩子的小手會抓糖了嗎？那麼花五元錢買一付袖珍型的撲克牌放在他的手裏吧！教他玩什麼牌戲都成，反正「發牌」有益。玩「摸對子」吧，不就學會了認數嗎？「拉黃包車」、行！孩子不但有了分類的觀念（紅心跟紅心、黑桃跟黑桃），也會比較數的大小了。「釣魚」，那不是連加法都會了嗎？你聽到孩子的歡笑聲嗎？對，你分不出他在學，還是在玩，但這有關係嗎？

孩子漸漸長大了。總有一天，他把嘴一嘟、牌一甩說：「摸對子、拉黃包車、釣魚、抽烏龜，這些都是孩子的玩意兒，你就會這些嗎？」噯！你知道你等待的一天終於到了。你取出在他週歲那天買的牌桌，輕輕的抹去的歲月的面紗。你讓孩子坐在你的對面，媽媽和哥哥也早已感受到這歷史性的一刻，分坐在桌子兩旁。如劍出匣，你讓一副華麗的新牌自盒中流出，傾注十三張於每人之手，你拾起你的一握，莊嚴的開叫：「一個黑桃」。孩子的眼中

有問號，但智慧不就是那樣來的嗎？

對！我聽說過中學裏有一些老師，不讓學生看電影，不讓學生看小說，不讓學生打球……只要啃書、只要做習題、只要升學；打橋牌？門都沒有。對這些老師說理可能是太晚了些，讓我們來看一些數據吧。手邊有我去年發表在「中國橋藝」和「附友季刊」的一篇文章「遙想附橋當年」，裏面記載 1954 年附中橋社剛成立時的社員名單，這批人裏有兩個國家隊代表、四個國際埠際賽代表、六個全省冠軍，打牌不可謂打得不兇，我們看看這些人在大專聯考中有沒有受到報應：

金寶和（東海），葉玉鉉（台大），
陳貽春（台大），張克斌（台大），
馬祖良（不詳），陸果立（成大），
余承一（台大），林 真（台大），
鍾光組（台大），程 平（台大），
楊全元（台大），朱寶賢（成大），
任筑山（台大），柯如甦（台大），
黃光明（台大），黃光輝（台大）。

當然，當年的附中是升學率第一的學校，但是恐怕沒有附中其他社團有四分之三進台大的比率吧！為什麼橋社會特殊呢，因為好的學生是會「想」的學生，而打橋牌就是逼你想。想什麼呢？你猜到了，想離散數學！至少一大部分是。要證據嗎？請看下文。

2. 叫牌

叫牌分建設性和破壞性兩種。建設性叫牌的目的是和同伴間交換牌情。因此是離散數學「編碼問題」的一個應用。一手牌十三張可以是五十二張牌的任何組合，因此有 $\binom{52}{13}$ 的不同牌型。同伴的一手牌可以是剩餘三十九張牌中任何十三張的組合，因此有 $\binom{39}{13}$ 種，兩手牌合在一起共有

$$\binom{52}{13} \binom{39}{13} \sim 5 \cdot 10^{12} \text{ 不同牌型。}$$

如果敵方不叫牌的話，則伴我問叫牌的序列必定是（派司、一梅花、一方塊、一紅心、一黑桃、一無王、……、七無王）這一有序集合裏的一個子集合，因為我們假設敵方永遠派司，故伴我任何一人派司（首叫除外）叫牌就結束了。這集合有三十六個元素，子集合的數目是 $2^{36} \sim 7 \cdot 10^9$ 。這個數目小於兩手牌的牌型數，所以我們不可能希望由叫牌來區別所有牌型。事實上也沒有這個必要，因為交換牌情的目的是在能夠準確的估計兩手贏墩的能力來決定一個適當的合約，但是每張牌贏墩能力不同，我們可以在交換牌情時忽略去一些不重要的牌。這就牽涉到統計學，把原始資料的重要訊息由少量的幾個參數表示出來。目前最流行的計點制，A四點、K三點、Q兩點、J一點，其它牌無點，就以全手總點數這一參數來概括一手牌的實力。其它要交換的是牌組張數的分配。

上面提到兩手牌共有 $\binom{52}{13} \binom{39}{13}$ 種牌型，但事實上我已看到了我自己的十三張牌，因此只需要知道同伴的牌型是 $\binom{39}{13}$ 種中的那一種。目前訊息理論中嶄新的「交流通訊」就是討論雙方各具訊息，如何最有效的溝通。

在交換牌情的過程中，敏銳的敵方也往往取得了情報，有利於他們在打牌時作正確的防禦

。當然，我可以和同伴約好，我叫黑桃就表示紅心長，但不告訴敵方。但橋規嚴禁這樣的密碼通訊，它明文規定伴我問任何約定一定要告知敵方。在這種約束下是否還有保密的可能呢有的！Winkler用到了「公鑰碼」的精神作此設計。舉一個例，譬如我和同伴在試叫滿貫時想檢查那一門花色上沒有A，而不想敵方知道。我們可以規定跳叫支持王牌保證必有王牌A或K（這規定並不瞞敵方）。當同伴跳叫後，假如我有王牌A，則下一次叫有A的花色；如有王牌K，則叫沒有A的花色，如果A和K都沒有，則叫無王。同伴聽到我叫某門花色時，根據他手中有王牌A還是K，他立刻明白我叫牌的意思。敵方雖知道公鑰（即同伴王牌有A或K），但不知道確實數據（A或K），而無法判斷牌情。

四手牌的牌情總共有 $52! / (13!)^4 \sim 6 \cdot 10^{18}$ 種，叫品則增加了「加倍」和「再加倍」兩種。Cohn算出了約有 $1.57 \cdot 10^{21}$ 不同叫牌序列，這個數目大於牌型數目。Berlekamp假設敵我雙方通力合作，設計了一套叫牌制度可以把每種牌型由不同的叫牌序列表示出來。不過最後的合約能否做成則非他所計。破壞性叫牌的目的是騷擾對方交換牌情，這牽涉到心理學和博戲論，不在本文探討之列。

3. 打牌

打牌分成莊家和防家兩邊。莊家要以最大的機率完成合約，防家要以最大的機率擊垮合約。所以打牌基本上是機率的應用，而且這些機率的計算都是組合性的。為什麼機率會出現在打牌裏呢？因為各個人只看到自己手裏的和夢家攤下的二十六張牌，其餘的二十六張牌可以任意的分佈在其它兩手牌裏；但是並不是每種分佈都有相同的機率，因為從叫牌裏我們可以得到關於這些分佈的訊息（注意：派司也

是一種含訊息的叫牌)。因此我們要計算的是「條件機率」，即在某種條件限制下的機率。

叫牌所提供的訊息和叫牌的人有關，不但不同的人用同一叫品來代表不同的意思，即同一人在作同一叫品時，他叫牌時的表情，和參考其他人的叫牌也往往因此透露出不同的訊息。在實踐中如何對這些情況作正確的判斷是一個高級橋手必備的條件，但是這裏面摻雜了很多不易分析的主觀因素，不是本文主題所在。因此我們以下的討論排除掉這些叫牌上的訊息，我們也假設每個牌手都是一個預先已設計好程序的機器人，他們打牌的習慣一成不變。

假設你在打一個黑桃合約，你手上的黑桃是 98765，夢家的黑桃是 AKJ10，左手防家首攻紅心，你在桌上贏了，拔了黑桃 A，兩個防家都跟小黑桃，你出方塊上手，手裏出一張黑桃，左手防家跟小黑桃，夢家該出 J 或 K 呢？如果左手防家有 Q，你該跟 J 偷過；如果右手防家有 Q，你該跟 K 敲出，兩者的機率對比如何呢？

一個沒有機率概念的橋手會說不在左就在右，機會是一半一半。有一點機率概念的橋手會想：左手防家還有十張牌，但右手防家有十一張牌，所以黑桃 Q 在左手防家手裏的機率是 $10/21$ ，略小於一半。如果這位橋手勤快些，他會作以下的計算：在出完兩磴牌後，兩防家手中共有二十二張牌包含兩張黑桃。所以按「超幾何分配」，左手防家有兩張黑桃的機率是 $\binom{2}{2} \binom{22}{9} / \binom{24}{11}$ ，有一張黑桃的機率是 $\binom{2}{1} \binom{22}{10} / \binom{24}{11}$ ，這張黑桃是小牌的機率

還要除以二。所以黑桃 Q 在左手防家的機率是

$$\binom{2}{2} \binom{22}{9} / \left[\binom{2}{2} \binom{22}{9} + \binom{2}{1} \binom{22}{10} / 2 \right]$$

= $10/23$ 。究竟那一種計算對呢？另外一個困擾的現象是這兩種計算都和已出過的磴數有關，但我們明知道左手防家是否有黑桃 Q 是牌一發好就確定的，為什麼它的機率會不斷改變呢？

以上三個答案， $1/2$ 、 $10/21$ 、 $10/23$ 其實都不對。不對的原因是它們都弄錯了機率空間。根據定義，機率空間是一個有相同機率的抽樣點的集合。在我們的討論裏，一個抽樣點就是一個含黑桃 Q 的單位。 $1/2$ 的答案假設每一個抽樣點是一個防家， $10/21$ 的答案假設每一個抽樣點是一張防家手中的牌， $10/23$ 的答案假設每一個抽樣點是一個從二十二張牌裏取十一張的牌型。這些抽樣點不能構成機率空間的原因是它們的機率不相同。這個結論在第一個答案比較明顯，在後兩個答案並不明顯。但是可以經由實驗（發牌）來驗證。

一個大家都可以同意的抽樣點是左手防家在看不見的二十六張牌中取十三張的牌型。在叫牌不提供訊息的前提下，這二十六張牌中任何十三張都有同樣機率被發給左手防家。在這個機率空間中，黑桃 Q 在左手防家的機率顯然是 $1/2$ 。但是這不是我們的問題，我們面對的問題是在若干磴牌出過後（包括黑桃 A 那一磴），及左手防家已跟出第二張小黑桃時，黑桃 Q 在左手防家的機率。這個機率和出過的牌有關。舉二個極端的例子，譬如出黑桃 A 時，右手防家已跟不出黑桃，則黑桃 Q 在左手防家的機率為壹；又譬如已出了十二磴，則黑桃 Q 在左手防家的機率為壹。雖然這些已出的牌都有關係，但是沒有一個現成的機率空間可用（主要因為出牌不是隨機的，防家拿黑桃 Q 2 一定先跟 2）。因此我們只有用最初二十六張牌的機率空間做出發點，再把出牌的因素考慮進去。所需的計算工具是在統計學上大有名但也多爭論的貝氏定理（我們的應用不涉及這些爭論）。貝氏定理在已有數據 D 時計算一個事件（抽樣點的一個集合）E 的機率用以下公式：

$$Prob(E|s) = \frac{\sum_{\rho \in E} Prob(D|s)}{\sum_{\rho} Prob(D|s)},$$

這裏 $Prob(x|y)$ 表示給定 y 後 x 的條件機率。在我們的討論裏 D 就是觀察到的出過的牌，E

是黑桃 Q 在左手防家這一事件。

如果一個牌型 s 和 D 相矛盾，則 $Prob(D|s)$ 當然是零；但當他們不矛盾時， $Prob(D|s)$ 不一定是壹。在上例裏如果把夢家的黑桃 J 換成黑桃 4 ，且假設在黑桃 A 這一磴時右手防家掉下黑桃 J 來，則現在的 s 只有兩大類，第一類右手防家黑桃只有 J ，第二類他只有 QJ 。為了討論簡便，我們暫時忽略王牌以外任何的出牌，則當 s 在第一類時， $P(D|s) = 1$ 因為 D 是唯一可能出現的數據。但當 s 在第二類時， $P(D|s) = 1/2$ 因為右手防家在黑桃 A 這一磴時出黑桃 $J(D)$ 和黑桃 $Q(D')$ 的機會一半一半。這一個考慮使得偷 Q 變成正確的打法，這是橋牌書上「限制選擇」定律的一個有名的應用。

因為莊家只有一個而防家有兩個，所以防家的打牌多了一個彼此間的通訊問題，這問題和叫牌的通訊基本上是一樣的，只是工具不是叫牌而是打牌。因此編碼和公鍵碼在打牌上一樣適用。

如果叫完牌後把四家的牌都攤開，當然就把機率從打牌中剝走了。這時的最佳主打和最佳防守的問題叫做「雙夢家問題」（應該叫「四夢家問題」）仍然可以是相當困難的。Lasker把這問題抽象化到一門花色 2^n 張牌的兩人遊戲，Kahn-Lagarias-Witsenhausen對這問題作了一系列深入的研究，還是不知道取得最多磴牌的最佳打法是什麼。

4. 賽牌

安排橋賽比安排任何其它比賽更麻煩是因為多了一個牌的好壞的因素。賽球，雙方用的是同一個球；賽棋，雖有黑棋、白棋之分，但沒有好壞之分；賽牌贏的一方却總要有聽輸方的抱怨：「我的牌真壞」的雅量。橋牌的另一個特點是一個人對同一副牌只能打一次，因為

判斷牌情是橋技重要的一部份，打過的牌再打則是在比記憶而不是比判斷了。因此賽球時如一方背風，我們可以讓兩隊輪換場地，但橋牌不能讓兩隊互換牌再打一次。一個不得已的辦法是把同一付牌給很多隊去打，我隊在這付牌上的得分然後和其它拿同樣牌的隊去比較而定出高下。這一種間接的比賽法是其它任何比賽沒有的，因此橋賽的設計變成組合設計的一大難題。

對一副給定的牌，我們稱同桌打這副牌的隊為「敵者」，和我們拿同樣牌的隊為「競爭者」。為了公平起見，一個賽程應該滿足：

(甲)任兩隊做敵者的次數應是一常數。

(乙)任兩隊做競爭者的次數也應是一常數。

為了賽程儘早結束，我們要求

(丙)當隊數是偶數時，每一隊在每一輪都要出賽；如果隊數是奇數，則每一隊可以輪空一次。

為了方便賽後的討論，也節省比賽的用具，我們也常要求每一隊都打同樣的一組發好的牌。

(丁)當隊數為偶時，每隊需打一組牌中的每一副；當隊數為奇時，可以有一副不打。

如在同一輪中兩場比賽都用同一副牌，則要就有一隊要等，要就要增加用具，因此我們希望：

(戊)每一副牌在同一輪中最多只用於一場比賽。

滿足這五個條件的賽程叫做一個「完全平衡好味兒轉動」。我們現在看看有多少組合設計是它的特例：

(甲)(丙)：循環賽

(甲)(丙)(丁)(戊)：如姆方塊

(甲)(乙)(丙)(丁)：平衡好味兒轉動

如果把(甲)改成

(甲')任兩隊最多做敵者一次，則

(甲')(丙)(丁)(戊)：好味兒設計

循環賽、如姆方塊和好味兒設計的充分必

要條件都已知道，兩種好味兒轉動用軋了哇域和軋了哇場的理論也已得到很多結果，但還未完全解決。

5. 橋手的修行

我們知道職業選手和業餘者通常是不在一起比賽的，因為強弱懸殊，沒得打頭。但是橋牌的全球大賽百慕達杯和奧林匹克賽，却是從一開始就容許職業和業餘橋手混著打，而且業餘橋手也常有勝職業橋手的記錄（像中華隊在1968和1969兩次得世界亞軍席）。為什麼橋牌會特別呢？我的看法是橋技有內功和外功，外功是叫牌和打牌的理論和實際，只和橋牌有關。內功即是「專心」的培養，因為叫牌和打牌上的各種問題，你能想出答案還不夠，你必須在一副牌規定的十分鐘內想出答案。這就需要強度的注意力集中和自我控制。這種內功的訓練在很多其它事業上也一樣需要，所以業餘橋手在招術上也許不夠熟嫻，但在物理、數學上十年的吐納功夫却養成了一流橋手必備的一個條件：「好學深思」。相反的，在橋牌上養成的「深思」習慣，也隨時可轉注於專業上，這是為什麼我認為學生打橋牌是好事。

橋牌對一個人正面的影響不光是在智育上，它很自然的引導出下列的人生觀：

1. 科學的人生觀：一個橋手會拿到怪牌，但他瞭解短期內的「罕事」放在長期的綜覽下是必然會發生的，一切都符合機率的法則。在社會上遇到了怪事，也許他的第一個反應也不會是請神問巫，祭天告命，而是把怪事放在適當的角度以高遠的目光透視它。

2. 進取的人生觀：如果一個橋手說他叫的合約從來沒有垮過，別人只會替他惋惜過於保守，失叫了很多有機會做成的更高的合約。這種

看法如果推廣到人生面，則一個永遠成功的人恰是證實了他的目標定得太低；而努力後的失敗，不正是一個敢於探索更大範疇的勇者的投影嗎？

參考資料

1. E. R. Berlekamp, Cooperative bridge bidding, IEEE Trans, Inform, Thy, Nov. 1975, 753 ~ 756.
2. D. L. Cohn, An enumerative scheme for bidding sequences in bridge, IEEE Trans Inform. Thy, Nov. 1975, 756 ~ 757.
3. D. Z. Du and F. K. Hwang, Balanced Howell rotations of the twin prime power type, Trans. Amer. Math. Soc. 271 (1982), 409 ~ 413.
4. J. Kahn, J. C. Lagarias and H. S. Witsenhansen, On Lasker's card game, Proc. 3rd Intern. Conf. Differ. games and Appl., Springer-Verlag, New York 1989.
5. E. T. Parker and A. M. Mood, Some balanced Howell rotations for duplicate bridge session, Amer. Math. Mon. 62 (1955), 714 - 716.
6. P. Winkler, Cryptological techniques in bidding and defense, Bridge world, April '80.

——本文作者任職於美國貝爾實驗室——