求和符號∑的意義和運用

黃毅英

衆所周知：$\sum\limits_{r=p}^{q} a_r$ 表

$$a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q \qquad (p\leqslant q),$$

且

$$\sum_r (a_r\pm b_r)=(\sum_r a_r)\pm(\sum_r b_r),$$

$$\sum_r (ka_r)=k\sum_r a_r \quad 。$$

然而，不少學生仍對求和符號感到害怕。他們主要認爲求和符號的定義過於抽象。不過，抽象化與符號化正是數學之特式和強而有力之處。甚至有學者認爲中世紀以後中國數學被西方趕過是由於中國數學缺乏一套有效的符號。就求和符號而言，若能逐步瞭解其意義與運算規律則不難靈活運用。本文從香港高級程度考試純數科中揀出相關題目爲例，探討求和符號的運用。這些題目亦可提供極佳的演習。

指標的變換

指標前移或後移，不會影響和值。即：

$$\sum_{r=p}^{q} a_r = \sum_{r=p+t}^{q+t} a_{r-t} \quad ,$$

$$\sum_{r=p}^{q} a_r = \sum_{r=p-t}^{q-t} a_{r+t} \quad 。$$

例如在二項式定理之證明中，由數學歸納法，假設了

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^r b^{n-r} \quad ,$$

可得出：

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{r+1} b^{n-r}+\sum_{r=0}^{n} C_r^n b^{n-r+1} \quad (1)$$

$$=\left[C_n^n a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n} C_{r-1}^n a^r b^{n-r+1}\right]$$

$$+\left[\sum_{r=1}^{n} C_r^n a^r b^{n-r+1}+C_0^n b^{n+1}\right] \quad (2)$$

$$=C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n} (C_{r-1}^n+C_r^n)$$

$$\cdot a^r b^{n-r+1}+C_0^{n+1} b^{n+1}$$

$$=C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n} C_r^{n+1} a^r b^{n-r+1}$$

$$+C_0^{n+1} b^{n+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{n+1} C_r^{n+1} a^r b^{n-r+1} \quad 。$$

由(1)到(2)即涉及指標之變換。指標變換亦可將次序倒置，即：

$$\sum_{r=p}^{q} a_r=\sum_{r=p}^{q} a_{p+q-r} \quad 。$$

例如我們已知從m元集到n元集共可有

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_r^n (n-r)^m$$

個蓋射（由「排容原理」(inclusion-exclusion principle)證得）。當$m=n$時，上數應爲n！。欲證此事，可考慮部份分數：

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

$$=\frac{A_1}{1+x}+\frac{A_2}{1+2x}+\cdots+\frac{A_n}{1+nx} \quad ,$$

其中

$$A_r=\frac{C_r^n(-1)^{n-r}r^n}{n!}\text{。}$$

設 $x=0$， 有

$$1=\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}C_r^n r^n \qquad (3)$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r C_{n-r}^n (n-r)^n \qquad (4)$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r C_r^n (n-r)^n \text{。}$$

（由於 $C_r^n=C_{n-r}^n$）

從(3)到(4)即涉及次序倒置之指標變換。一般而言，有

$$\sum_{r=p}^{q}a_r=\sum_{r=\varphi(p)}^{r=\varphi(q)}a_r \quad ,$$

其中 φ 爲從 $\{p, p+1, \cdots, q\}$ 到自身之一一對應。

其他指數類型

我們知道

$$C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+\cdots+(-1)^n C_n^n=0 \text{，}$$

故有

$$C_0^n+C_2^n+\cdots=C_1^n+C_3^n+\cdots$$

用求和符號，可寫作

$$\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}C_{2r}^n=\sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_{2r+1}^n\text{。}$$

此時，指標的上限已異於常見；其實，我們還可以有

$$\sum_{i\in j}a_{ij} \quad , \sum_{i\neq j}a_{ij} \quad ,$$

甚或

$$\sum_{i\in A}a_{ij}$$

（$A\subset N$）等。比如在以下對於科西不等式的證明，便有 $\sum\limits_{i>j}$ 的出現：

對於實數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$，有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$$

$$=[\sum_{i=j}a_i^2b_j^2+\sum_{i\neq j}a_i^2b_j^2]-[\sum_{i=j}a_ib_ia_jb_j+\sum_{i\neq j}a_ib_ia_jb_j] \qquad (5)$$

$$=\sum_{i\neq j}a_i^2b_j^2-\sum_{i\neq j}a_ib_ia_jb_j \qquad (6)$$

$$=\sum_{i>j}a_i^2b_j^2+\sum_{i>j}a_j^2b_i^2-2\sum_{i>j}a_ib_ia_jb_j \qquad (7)$$

$$=\sum_{i>j}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0 \quad ,$$

等式成立當且僅當 a_i 與 b_i 成正比。

由(6)至(7)，我們運用了

$$\sum_{i\neq j}a_{ij}=\sum_{i>j}a_{ij}+\sum_{i>j}a_{ji} \quad \text{。}$$

在證明Tchebycheff不等式時，亦利用著類似的技巧。以下轉錄香港高級程度考試純數科75年卷一（以後簡稱「高試75(Ⅰ)」）的一題：

(a)設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$爲正實數而 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$。解釋何以對指定之 j，

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0 \quad \text{。}$$

並證明

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-b_j\sum_{i=1}^{n}a_i-a_j\sum_{i=1}^{n}b_i+na_jb_j \quad ,$$

且推論

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \quad \text{。}$$

(b)設 $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ 爲 $n\times m$ 之正實數矩陣，對於任何 j 有

$$a_{1j}\leqslant a_{2j}\leqslant\cdots\leqslant a_{nj} \quad ,$$

證明

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i1})(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i2})\cdots(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{im})$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im} \quad \text{。}$$

(c)設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲正實數而 m 爲 $\geqslant 1$ 之整數，求證

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)^m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^m \quad \text{。}$$

由上面之(5)，我們曾用到

$$\sum_{i=j}a_{ij}=\sum_{i}a_{ii} \quad ,$$

在證明對於正交向量 e_i 有 $(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ 的過程中，我們亦有利用上式：

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i) \qquad (8)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j e_i e_j$$

$$= \sum_{i=j} a_i b_j e_i e_j + \sum_{i \neq j} a_i b_j e_i e_j$$

$$= \sum_{i=j} a_i b_j (1) + \sum_{i \neq j} a_i b_j (0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad 。$$

於高試 81(I)中，則有 $\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=N}$ 符號之引入。今錄其(b)部如下：

以二項式定理證明，對於任何正整數 n 及 N，

$$(y_1+y_2+\cdots+y_n)^N$$

$$= \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=N} \left[\frac{N!}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \cdots y_n^{j_n}\right]$$

啞指標與兩和之積

$\sum_{i=p}^{q}$ 中之 i 只爲啞指標，故

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j \quad 。$$

於上面科西及 Tchebycheff 不等式的證明中均有用此結果。又：

$$\sum_{i>j} a_{ij} = \sum_{i<j} a_{ji} \quad 。$$

於科西不等式證明中及上面之(8)，涉及了兩和之積：

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{m} b_i) = \sum_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,m}} a_i b_j$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i) = \sum_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,m}} a_i b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i \neq j} a_i b_j \quad ,$$

故

$$(\sum_{r=0}^{n} a_r x^r)(\sum_{r=0}^{n} b_r x^r)$$

中 x^k 之係數爲

$$\sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r} \quad 。$$

例如

$$(1+x)^{2n} = (\sum_{r=0}^{n} C^n_r x^r)(\sum_{r=0}^{n} C^M_r x^r)$$

比較 x^k 係數，得

$$C^{2n}_n = \sum_{r=0}^{n} C^n_r C^n_{k-r} \quad 。$$

特別地，代 $k=n$，有

$$\sum_{r=0}^{n} (C^n_r)^2 = \sum_{r=0}^{n} (C^n_r C^n_{n-r}) = C^{2n}_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad 。$$

雙重和

$\sum_{i<j} a_{ij}$ 和 $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$ 均雙重和之例。我們可以用數學歸納法證明

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (9)$$

故可簡記作

$$\sum_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,m}} a_{ij}$$

或

$$\sum_{i,j} a_{ij} \quad 。$$

又

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j \quad ,$$

然而，

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j \neq \sum_{j=1}^{m} (a_i \sum_{i=1}^{n} b_j) \, ,$$

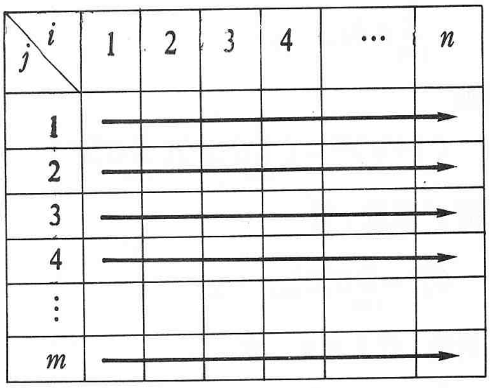
因 a_i 與 i 有關，不能從 $\sum_{i=1}^{n}$ 中抽出。事實上，右式無理。又

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n} (b_j \sum_{i=1}^{j} a_i) \neq (\sum_{j=1}^{n} b_j)(\sum_{i=1}^{j} a_i)$$

這些都是頗常見的錯誤。(9)的等式可圖表作：

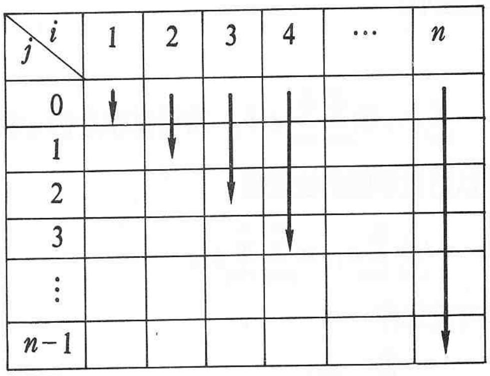
$j \backslash i$	1	2	3	4	…	n
1						
2						
3						
4						
⋮						
m						

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

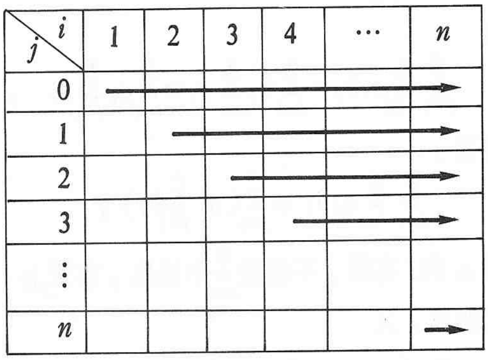


$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

我們亦有類似的「三角和」：



$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}\Big)A_{ij}$$



$$\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=j+1}^{n}A_{ij}\Big)$$

事實上，高試77(I)第5題(a)即要求用對於 n 的數學歸納法證明

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}A_{ij}\Big)=\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=j+1}^{n}A_{ij}\Big) \quad 。$$

最後，再列出兩題高試題目作參考：

高試82(I)的8(a)：

設 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 及 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 爲二實數集。定義 $S=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，$B_i=\sum_{j=1}^{i}b_j$，求證

$$S=a_nB_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i \quad 。$$

高試77(I)之第1題：

對於正整數 m，n，設

$$\sum_{r=0}^{mn}a_rx^r=(1+x+\cdots+x^m)^n \qquad (*)$$

(a)用 m，n 表

$$\text{(i)}\ \sum_{r=0}^{mn}a_r\ ,\ \text{(ii)}\ \sum_{r=0}^{mn}(-1)^ra_r\ ,\ \text{(iii)}\ \sum_{r=0}^{mn}2^ra_r\ 。$$

(b)對 $(*)$ 作微分，證

$$mn\sum_{r=0}^{mn}a_r=2\sum_{r=1}^{mn}a_r \quad 。$$

(c)證

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^r r=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & 若 m 爲偶數\\[2ex] -\dfrac{m+1}{2} & 若 m 爲奇數\end{cases}$$

從上推論

$$2\sum_{r=1}^{mn}(-1)^r ra_r=\begin{cases}mn & 若 m 爲偶數\\ 0 & 若 m 爲奇數\end{cases}$$

結　語

求和符號有不少的性質。透過上面的逐步分析，從簡單的代數運算、指數變換以至雙重和，學生較易掌握求和符號的運用。

—本文作者爲香港中文大學教育學院講師—