上期徵答問題解答

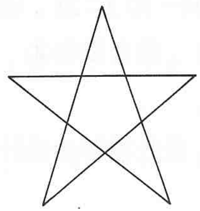
14401　五角星形配號問題(一)

優勝名單：

良好：胡豐榮（內灣國小）

參考答案（張國男提供）

答案爲「絕對不能」，證明如下：



假設不然（即假設確有能使共線四點之號數和均相等之解）。

因每一交點恰有二條直線經過，若對五條直線上之交點分條計算其號數和再相加，則每數皆計算二次，故知任一解之共線四點之號數和均爲 $(1+2+\cdots+10)\times 2\div 5=22$ 。

此後，對於四數組，均約定其數全異，且由小而大排之。

和爲 22 之四數組，計有下列 18 個：

(1,2,9,10)，(1,3,8,10)，(1,4,7,10)，(1,4,8,9)，(1,5,6,10)，(1,5,7,9)，
(1,6,7,8)，(2,3,7,10)，(2,3,8,9)，(2,4,6,10)，(2,4,7,9)，(2,5,6,9)，
(2,5,7,8)，(3,4,5,10)，(3,4,6,9)，(3,4,7,8)，(3,5,6,8)，(4,5,6,7)。

形式上，對於所有解全體，可以如下通盤而有系統之方法加以檢驗：

先檢驗經過 1 之二條直線，由上列18個，易知此二條直線可選配之數組僅有三對，即(a)(1,2,9,10)與(1,6,7,8)，(b)(1,3,8,10)與(1,5,7,9)及(c)(1,4,8,9)與(1,5,6,10)。

(A)若經過 1 之二條直線所配之數組爲(1,2,9,10)與(1,6,7,8)，則對於如此之解，再檢驗經過 2 之另一條直線。因此三條直線必兩兩相交而構成三個交點，故此第三條直線可選配之數組須滿足下列條件：2 必出現，1,9,10 均不得出現且 6,7,8 恰出現一數。但由前列 18 個，易知無合乎條件之數組可選配。

(B)若經過 1 之二條直線所配之數組爲(1,3,8,10)與(1,5,7,9)，則對於如此之解，再檢驗經過

5之另一條直線。因此三條直線必兩兩相交而構成三個交點，故此第三條直線可選配之數組須滿足下列條件：5必出現，1,7,9均不得出現且3,8,10恰出現一數。但由前列18個，易知無合乎條件之數組可選配。

(C)若經過1之二條直線所配之數組爲(1,4,8,9)與(1,5,6,10)，則對於如此之解，再檢驗經過4之另一條直線。因此三條直線必兩兩相交而構成三個交點，故此第三條直線可選配之數組須滿足下列條件：4必出現，1,8,9均不得出現且5,6,10恰出現一數。但由前列18個，易知無合乎條件之數組可選配。

因此，可推翻最初之假設，而得結論：將上圖所示五角星形之10個交點由1至10配號，絕對不能使共線四點之號數和均相等。

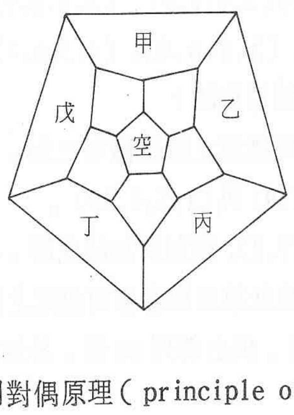
評　註

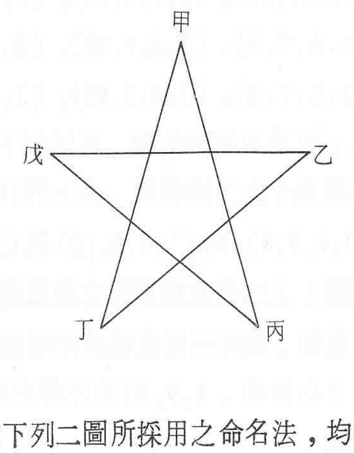
九章出版社於1990年9月出版之《國際數學奧林匹克大陸隊訓練教材》一書，232頁上有本題之一種妙解，茲轉述之，以供讀者參考：

若原題有解，則對於任一解而言，皆可推得下列之結果：①共線四點之號數和均爲$(1+2+\cdots+10)\times 2\div 5=22$。② 1必與10配至同一條直線，否則經過10之二條直線所配之八數和(10計算二次)至少爲$2+3+4+5+6+7+10\times 2=47>22\times 2$，矛盾！③若經過10之二條直線爲$l_1$與$l_2$，則$l_1\cup l_2$以外三個交點之號數和爲$55-(44-10)=21$。④若經過1之二條直線爲$l_1$與$l_3$，則$l_3$上除1以外三個交點之號數和爲$22-1=21$。⑤由③與④，可知$l_1\cup l_2\cup l_3$以外之唯一交點必與$l_2\cap l_3$配以同一數，矛盾！故本題必然無解。

如是解題，可謂匠心獨運，巧不可階。但此種解法係針對此特例而設計，未能普遍適用於類似問題，習題(三)可作爲具體之例證。

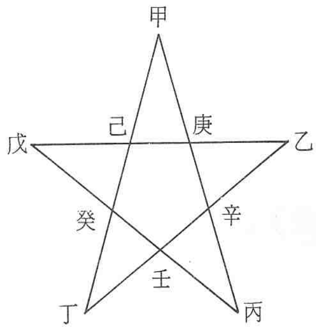
若一個正十二面體鐵絲模型(即以鐵絲爲稜製成之骨架)之外表十面以紙糊之，其開口(不糊紙之)二面平行，如此所得之燈籠某一開口面之五鄰面爲甲，乙，丙，丁與戊，則本文所處理之問題與下述問題相當：將此燈籠之糊紙面由1至10配號，是否能使甲之四鄰面之號數和，乙之四鄰面之號數和，丙之四鄰面之號數和，丁之四鄰面之號數和，以及戊之四鄰面之號數和均相等？(註：下左爲此燈籠之平面示意圖，其中標明空字者爲一開口面。比較下列二圖所採用之命名法，顯然可得上述之結果。)

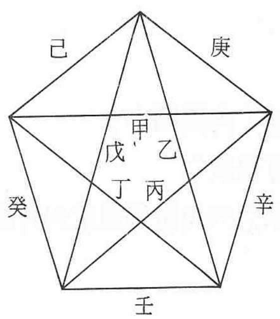




再者，應用對偶原理(principle of duality)，或比較下列二圖所採用之命名法，均可知本文所處理之問題亦與下述問題同義：將構成下右圖之十條線段由1至10配號，是否能使經過大五邊形每

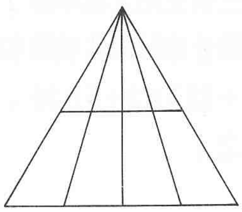
一頂點四條線段之號數和均相等？

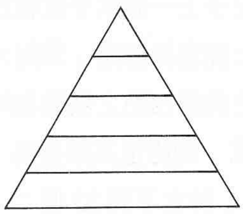




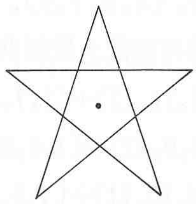
習　題

㈠將下左（右）圖所示十一個交點由1至11配號，是否能使二條（五條）水平線段上五點（二點）之號數和相等，且其他方向五條（二條）線段上三點（六點）之號數和亦相等？





㈡將下圖所示正五角星形之十個交點及其中心由1至11配號，是否能使共線四點之號數和均相等？〔提示：中心配以11之情形，本文已證明無解。中心配以6之情形，可仿此處理之。由中心配以1之任一解，以12爲被減數，減去各點所配之號數，所得者即爲中心配以11之一解，故知中心配以1之情形亦必無解。〕



㈢將下圖所示五角星形之十個交點配以下列十數，是否能使共線四點配數之和均相等？若不能，試說明其理由；若能，試求所有解。(i) 1，2，3，4，5，6，7，9，11，12。(ii) 1，2，3，4，5，6，8，9，10，12。〔提示：可模仿本文所用之檢驗法試配之。〕