向量外積與四元數

李白飛

1.向量的外積

有「內積」就應該有「外積」，聽起來似乎理所當然，其實並不盡然，只有三維空間中，才有外積的定義。再說「內」、「外」之分，似乎是歷史的錯誤；兩個向量的內積，並不是個向量，而是個純量（數），然而兩個三維向量的外積，却仍是個向量，絲毫不見「外」。

在三維空間中，兩個向量的外積，可以自然地描述，也可以藉由坐標來定義。設$\vec{a}$，$\vec{b}$為空間中兩個不平行的非零向量，其外積$\vec{a}\times\vec{b}$為一長度等於$|\vec{a}\|\vec{b}|\sin\theta$,（$\theta$為$\vec{a}$，$\vec{b}$兩者交角，且$0<\theta<\pi$），而與$\vec{a}$，$\vec{b}$皆垂直的向量。通常我們採取「右手定則」，也就是右手四指由$\vec{a}$的方向轉向$\vec{b}$的方向時，大姆指所指的方向規定為$\vec{a}\times\vec{b}$的方向。例如在右手系的空間坐標中，若$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分別代表x軸，y軸，z軸正向的單位向量，則$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$。另外，顯而易見的是，$\vec{a}$，$\vec{b}$的外積與其次序有關，$\vec{b}\times\vec{a}$並不等於$\vec{a}\times\vec{b}$；事實上，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$。當$\vec{a}$，$\vec{b}$中有一為零，或者兩者平行時，則令$\vec{a}\times\vec{b}=0$。

如果選定一組坐標系，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$為對應的三正交單位向量，則$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積，可藉由其分量表示出來：若$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，則$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$。假使我們借用行列式的符號，不妨把它寫成

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

不但容易記，而且也可以經由行列式的性質，驗證一些外積的性質。

這兩個方法，各有千秋，前者易懂，後者好算。借助於坐標化，我們可以透過機械的運算（可能繁但不會難），驗證一些類似$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0$的複雜式子。即使只知道定義，你一樣可以驗證，然而自然的描述法，就很難辦到。不過，引進坐標系來定義，終不免有個疑慮，那就是：選擇不同的坐標系，會不會導致不一樣的外積？

由行列式的性質可知，若將$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分別代以a_1，a_2，a_3或b_1，b_2，b_3，則$(*)$之行列式等於0，也就是說$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$。換句話說，$\vec{a}\times\vec{b}$與$\vec{a}$，$\vec{b}$兩

向量都正交。另外，$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=|\vec{a}\times\vec{b}|^2$。而我們知道，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，因此，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，總而言之，$\vec{a}\times\vec{b}$ 爲一長爲 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，而與 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 皆正交的向量，可見與坐標系的選取無關。

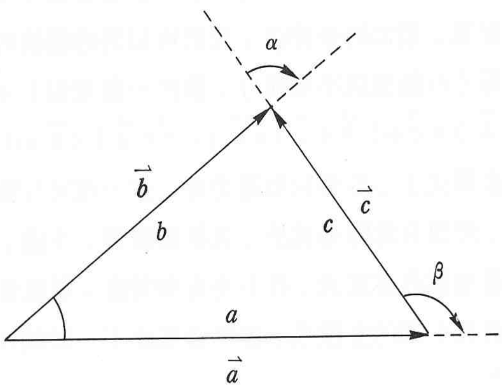
外積的運算，與一般的乘積，有同有不同。相同的是，分配律成立：$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$，$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$。不同的是，交換律與結合律並不成立。（試舉一例，說明 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 不必等於 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$！）取而代之的是，反交換律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 及 Jacobi 恒等式 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0$。另外，純量與向量的混合結合律則無問題：

$$\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$$

現在，我們來看一些簡單的應用：

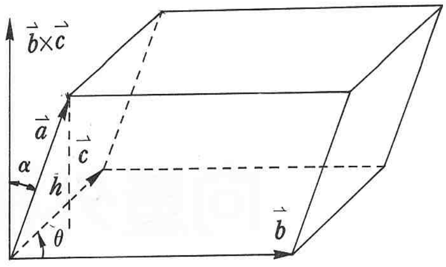
【例 1】正弦定律

如右圖 $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$，故 $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{c}\times(\vec{b}-\vec{a})$ 即 $0=\vec{c}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}$，故 $\vec{c}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，從而 $|\vec{c}||\vec{b}|\sin\alpha=|\vec{c}||\vec{a}|\sin\beta$，因此 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$。



【例 2】平行六面體的體積

如下圖，$\vec{b}\times\vec{c}$ 垂直於底面，即 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 所生成的平面，其長 $|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta$



，也就是底面平行四邊形的面積，因此 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha$，而 $|\vec{a}|\cos\alpha$ 即爲高 h，故 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 代表 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三向量所張之平行六面體的體積。

若 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$b=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$，則

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$ 。又，由行列式的性質，易知

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。

【例 3】平行四邊形與三角形之面積

在例 2 中，若取 $\vec{a}$ 爲垂直於底面之單位向量，則平行六面體之體積，即底面平行四邊形之面積。因此，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 二向量所張之三角形面積，即爲此三重積 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 之半。

例如，平面上三點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 所形成之三角形面積可計算如下：取 $\vec{b}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$，$\vec{c}=\overrightarrow{P_1P_3}=(x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}$，而 $\vec{a}=\vec{k}$，則 $\Delta P_1P_2P_3=$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\ x_2-x_1&y_2-y_1&0\\ x_3-x_1&y_3-y_1&0\end{vmatrix}$$

$\times y_1$

$\times x_1$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

【例 4】平面方程式

設$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$爲空間中不共線三定點，$P(x,y,z)$爲空間任一點，則P在P_1,P_2,P_3所決定之平面上，其充要條件爲$\overrightarrow{P_1P}$，$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{PP_3}$所張之平面六面體之體積爲0。換言之，

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

爲P_1，P_2，P_3所決定之平面方程式。

這個方程式還可以這樣看：$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$ 與$\overrightarrow{P_1P_2}$及

$\overrightarrow{P_1P_3}$皆垂直，故爲此平面之一法線向量，而此面又通過P_1點，因此$\overrightarrow{P_1P}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})=0$。

前面我們引進了$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$這種純量值的三重積，現在我們考慮另一種向量值的三重積$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$。我們可以證明$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，從而Jacobi恒等式立即得證：$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=0$。這個式子，我們自然可以將$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$代入驗證。如果利用內積和外積的線性（分配律與混合結合律），當然簡化到只須檢查$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$爲坐標單位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$就夠。然而機械式的演算，到底難以深刻地瞭解與記憶，因此，我們從另一個角度來分析。

假設$\vec{a}$，$\vec{b}$爲二不平行的非零向量，則$\vec{a}\times\vec{b}$與$\vec{a}$及$\vec{b}$皆正交，而$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$則又與$\vec{a}\times\vec{b}$正交，因此必須與$\vec{a}$，$\vec{b}$所張的平面平行，也就是說，$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，又因$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$與$\vec{c}$也正交，故$x(\vec{a}\cdot\vec{c})+y(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$。若$\vec{c}$與$\vec{a}$，$\vec{b}$皆不正交，則有$-x/(\vec{b}\cdot\vec{c})=y/(\vec{a}\cdot\vec{c})=\lambda$，因此$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]$。在$\vec{b}=\vec{c}$的特別情況時，不難看出$\lambda=1$，也就是說$(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{c})\vec{a}$：因爲兩邊分別與$\vec{a}$作內積，則得$(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{c}\cdot\vec{a}=\lambda[(\vec{a}\cdot\vec{c})^2-(\vec{c}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{a})]$；因此$\lambda[(\vec{a}\cdot\vec{c})^2-|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2]=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=-|\vec{a}\times\vec{c}|^2$，即$-|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\cdot\sin^2\theta=\lambda(|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\cos^2\theta-|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2)=-\lambda|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\sin^2\theta$。從而$\lambda=1$。至於一般情況，可將$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]$兩邊與$\vec{b}$作內積而得：$\lambda[(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})]=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{b})]=-\vec{a}\cdot[(\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{b}]=-\vec{a}\cdot[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{c}]=(\vec{b}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})$，故$\lambda=1$。

【例 5】

設$\vec{a}$，$\vec{b}$爲二已知向量，且$\vec{a}\neq 0$而$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又設c爲一已知實數，試求一向量$\vec{v}$，使其滿足$\vec{a}\times\vec{v}=\vec{b}$，且$\vec{a}\cdot\vec{v}=c$。

【解】

設$\vec{v}$爲所求之向量，則$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{v})=(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{v}=c\vec{a}-|\vec{a}|^2\vec{v}$，故

$\vec{v}=\frac{1}{|\vec{a}|^2}(c\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b})$，代入檢驗，確實滿足。

2. 四元數

三維空間向量及其內積、外積之成爲數學物理的工具，大約從19世紀80年代初期開始，在此之前被普遍使用的，則是Hamilton所創造的「四元數」。由於複數在平面上幾何及物理的有效應用，促使人們探索一種三維「複數」的工具。1843年Hamilton 創造了形如 $a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ 的所謂**四元數**，其中 a_0，a_1，a_2，a_3 爲實數，i，j，k 則扮演相當於複數中 i 的角色。兩個四元數 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ 與 $b=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$ 的和，定義爲 $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k$，至於乘積則由 $i^2=j^2=k^2=-1$ 與 $ij=k=-ji$，$jk=i=-kj$，$ki=j=-ik$ 及分配律來定義，也就是說 $ab=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)i+(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1)j+(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)k$。我們可以驗證，加、減、乘、除四則運算對於四元數系照樣可行，就像在複數系中一般，只除了乘法交換律並不滿足。可除性較不明顯，但却是相當重要的。若 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$，定義 $\bar{a}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$ 爲其共軛數，則 $a+\bar{a}=2a_0$ 與 $a\bar{a}=\bar{a}a=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 皆爲實數。令 $|a|=(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$ 而稱之爲 a 之範數（絕對值）。顯然，若 $a\neq 0$，則 $|a|^{-2}\bar{a}$ 爲 a 之倒數。

我們若仔細觀察四元數的乘積定義，不難發現向量的內積、外積隱含其中。若 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$，我們稱 $\alpha=a_0$ 爲 a 之純量部分（實數部分），$u=a_1i+a_2j+a_3k$ 爲 a 之向量部分（虛數部分），當 $a=\alpha+u$，$b=\beta+v$，則 $ab=\alpha\beta+\alpha v+\beta u+uv$，$\alpha\beta$ 爲一純量，αv，βu 爲向量，然而 uv 是什麼？由乘積定義可知 $uv=(a_1i+a_2j+a_3k)(b_1i+b_2j+b_3k)=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+[(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k]$，正是 $-u\cdot v+u\times v$，因此 $(\alpha+u)(\beta+v)=(\alpha\beta-u\cdot v)+(\alpha v+\beta u+u\times v)$ 清楚地描述四元數的乘法。

因爲乘法交換性的缺乏，使得四元數的運算顯得繁而難，以致於向量的內積、外積引進後，四元數就被人淡忘了。然而，四元數的可除性，却是內積、外積所不及的，譬如說，例5的解答，雖簡短却不容易。然而，就四元數的觀點而言，這個問題只不過是一元一次方程式 $\vec{a}\vec{v}=-c+\vec{b}$ 而已，我們可以立刻解得

$$\vec{v}=\vec{a}^{-1}(-c+\vec{b})=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}(-c+\vec{b})$$

$$=\frac{1}{|\vec{a}|^2}(c\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b})。$$

參考資料

1. Morris Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.*
2. Harry Lass: *Vector and Tensor Analysis.*

——本文作者任教於台大數學系——