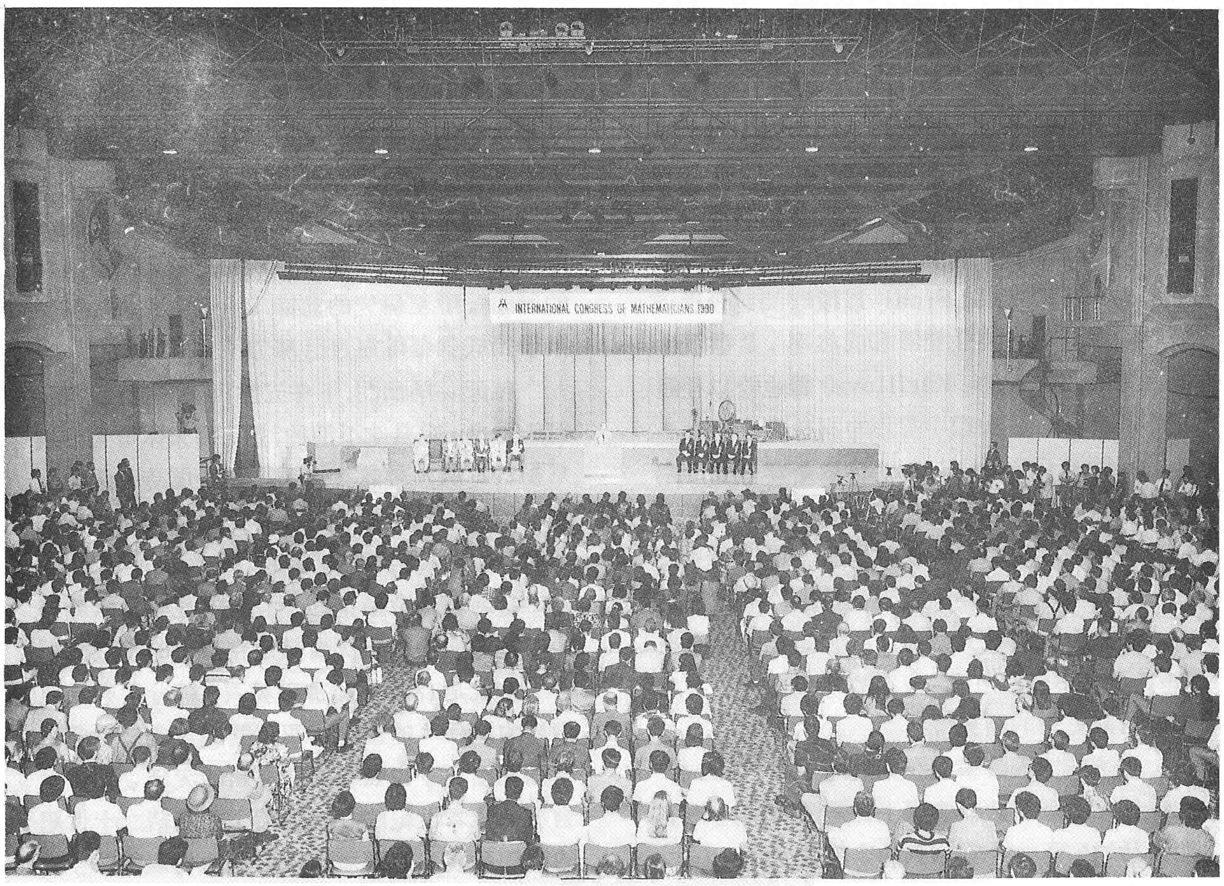
ICM專題

淺談Jones-Witten理論及Floer同調群

—1990費爾茲獎部份有關工作簡介—

鄭日新



圖一　1990年國際數學家大會

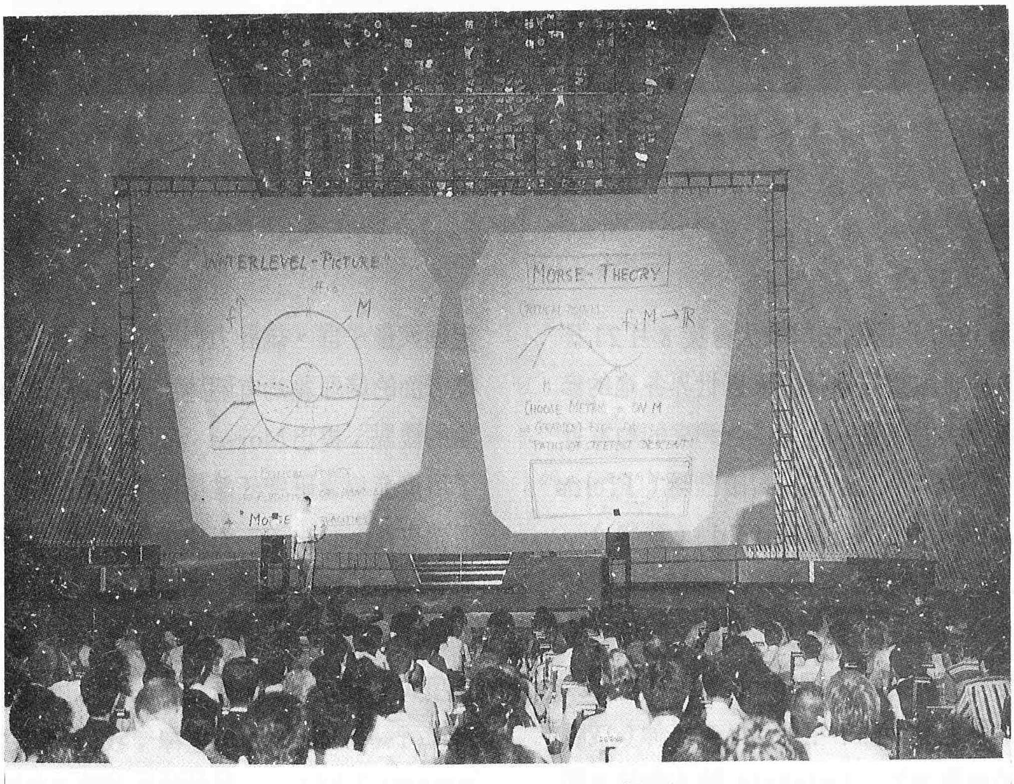
圖二　費爾茲獎及Nevanlinna 獎得主

西元 1990 年國際數學家大會從 8 月 21 日到 29 日於日本京都舉行，來自世界各地的參加者約四千人（見圖一），從台灣來的約有近 30 人，大陸 60 多人。這次費爾茲獎（ Fields Medal ）得主爲V.G. Drinfeld （蘇聯）， V. Jones（紐西蘭；美國），S. Mori （日本）及E. Witten（美國）（見圖二：依序由右至左，第五人爲Nevanlinna 獎得主）諸人工作於其立足點上雖不相同，但其延伸（或應用）却是相關連的。Drinfeld 除在數論方面的工作外，於數學物理方面，首先提出（定義）了量子群的觀念；Jones 從Von Neumann 代數的觀點來看各方事物，其指標（ index ）定理與量子群、統計力學、李氏代數表現、拓樸方面的結理論均有關連；Witten 從量子場論的觀點，提出Morse 理論的新看法，開闢了用規範場論研究低維度拓樸的新方向，並有所謂Witten-Jones 不變量的發現。本文將簡介Witten 所做關於拓樸學中結理論（ Knot Theory ）的多項式不變量，現在叫 Jones 多項式，的解釋及推廣。另一方面由於Witten 對Morse 理論給予的詮釋，我們知道由（ generic ）Morse 函數的臨界點及其間梯度流（ gradient flow ）的軌跡線可完全決定底空間的拓樸。Andreas Floer 把這層道理推廣到無窮維，並定出了所謂的Floer（上）同

調群（（co）homology group），原來只是爲了他在扭對稱幾何（symplectic geometry）方面的問題，後來發現這推廣非常有用。大致來說，當考慮一定向的同調三維球M上所有$SU(2)$聯絡（connection）的空間，用Chern-Simons泛函做我們的Morse 函數時，其相關的Floer同調群的Euler 示性數正好是M的Casson 不變量。Casson 不變量是精細的三維拓樸量，可以完全由拓樸的程序定義。上述經由某種無窮維Morse理論的解析考慮却能得到它，相信只是更一般道理的冰山一角。最近Witten也對Casson 不變量給了量子場論的解釋。各方面情況顯示，數學家恐怕必須正視不斷出現的各類型Feynman積分的嚴格化，因爲它已頻頻地被用來表達諸多重要的精細拓樸量。（另一例是Donaldson 對平滑四維流形所給的多項式不變量也由Witten給出了量子場論的解釋。）

1.從Morse理論談起

古典有限流形上的Morse函數是一僅有非退化臨界點（non-degenerate critical



圖三　Floer在京都演講情形

point）的實函數。臨界點的總數（帶著適當正、負號）爲此流形的Euler示性數，這是最古老最基本的拓樸不變量。但是Morse理論告訴我們更多，僅用Morse函數在臨界點的二階數據，就能給我們關於流形的同調群（Euler示性數可被同調群決定，故拓樸空間的同調群可視爲其Euler示性數的精細推廣）精確的估計，傳統上這估計反應在Betti數及不同型臨界點的數目之間的所謂Morse不等式。尤有甚者，如Witten所建議，我們可能僅由臨界點的訊息（如前述）完全決定流形的同調群。Andreas Floer 在晚近一篇文章中，寫下了嚴格的證明。（參考〔F1〕）因爲想法是這麼漂亮且重要，Floer採用它推廣到無窮維的情況，產生了一些美妙的應用，我們希望在這兒細述一下：

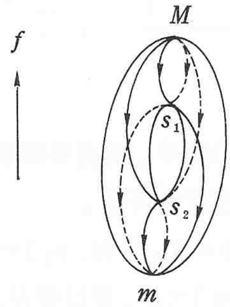
假設M是一個緊緻流形，f是一個M上的Morse函數，在每一臨界點P，Hessian $H_P(f)$在P的切空間上是一非退化的二次形，它有n_P^+個正固有值及n_P^-個負固有值。當然，其和$n_P^+ + n_P^- = \dim M$，與點P無關。令鏈群（chain group）C_q由有q個負固有值（i.e. $n_P^- = q$）之臨界點P爲其生成元產生。定義邊界算子

$$\partial : C_q \to C_{q-1}$$

被一矩陣給出，其成分由每對臨界點(P,Q)，$P \in C_q$，$Q \in C_{q-1}$ 決定。我們首先在M上選擇一一般度量（generic metric），考慮f的下降梯度流（descending gradient flow）$-\nabla f$，然後看從P出發到Q的軌跡線，軌跡線的總數是有限的，帶著適當正、負號數它（我們對每一臨界點切空間的負固有值部份給一定向（orientation），除去P出發的方向，剩餘的負固有值部份便自然有一定向使其與P出發方向合併爲給定的定向（注意0維之定向爲＋或－號），此剩餘部份維度爲$q-1$，沿著軌跡線走到Q時，若與我們賦予Q的切空間負固有值部份之定向相合，則給此軌跡線正號，否則賦予負號。）這就給了∂的(P,Q)成分。驗證$\partial^2=0$，所以我們有鏈複體（chain complex）C_*的同調群。能夠證明這同調群與一般度量的選取無關，且事實上同構於空間M本身的同調群。（〔F1〕中做的是上同調群，基本精神無異。）

【例1】

如圖（也參見Floer在京都的演講照片，圖三）f是輪胎面上的高度（或水位）函數，f有四個臨界點M，s_1，s_2，m，M爲極大，故$n_M^-=2$，m爲極小，故$n_m^-=0$，s_1和s_2爲鞍點，故$n_{s_1}^- = n_{s_1}^- = 1$。

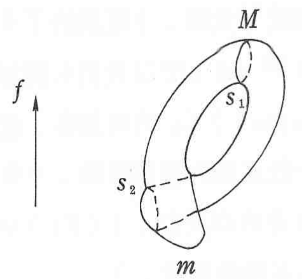


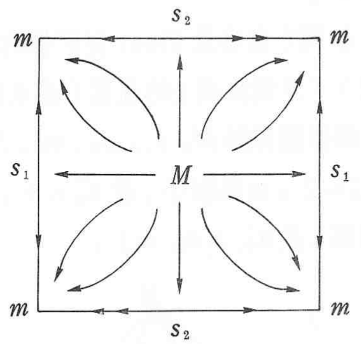
所以鏈群C_2只有一生成元M，C_1有二生成元s_1，s_2，C_0也只有一生成元m，對一一般度量，關於f的下降梯度流，我們有臨界點之間的軌跡線如圖。注意s_1與s_2之間並無軌跡線。現在求邊界算子，我們任意賦予四臨界點切空間的負固有值部份定向（若爲0維度，如在m點，賦予＋或－號），從M到s_1雖有兩條軌跡線，容易驗知其被賦予不同符號，所以$(M, s_1)=0$，同理$(M, s_2)=0$。

從s_1或s_2到m，因負固有值部份僅一維，除去出發方向後，餘0維我們給＋或－號，但另一軌跡線出發方向相反，則得異號，所以$(s_1, m)=(s_2, m)=0$，由以上知邊界算子∂恒爲0，即得我們C_*的同調群便是輪胎面的同調群。

【例2】

考慮克萊因瓶（Klein bottle），見圖，符號意義如例1，方塊圖（上下兩對邊逆向對





等，左右兩對邊同向對等，爲克萊因瓶的一種表示法）表示降梯度流的流程。

易知 $(M, s_1)=0$，$(M, s_2)=\pm 2$，$(s_1, m)=(s_2, m)=0$，所以得 $H_2(C_*)=0$，$H_1(C_*)=\boldsymbol{Z}\oplus \boldsymbol{Z}_2$，$H_0(C_*)=\boldsymbol{Z}$，與克萊因瓶的同調群一致。（感謝與王藹農君關於上述Witten複體 C_* 的討論。）

2.Floer的同調群

上節有限維空間的討論將推廣到一有意思的無窮維空間的例子。令 Y 表一定向的同調三維球（即其同調群與三維球一樣，但一般未必同胚）。令

$\mathscr{A}=Y$ 上自明束（trivial bundle）的所有 $SU(2)$ 聯絡的空間。

$\mathscr{G}=$規範變換（gauge transformation）群（規範理論的對稱群），即所有 $Y\to SU(2)$ 的映射（map）。

$\mathscr{C}=\mathscr{A}/\mathscr{G}$（去除對稱後的淨聯絡組成的空間）

我們考慮Chern-Simons泛函 $f:\mathscr{C}\to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$（後文將詳議）做無窮維空間 $\mathscr{C}$ 上的Morse函數。爲了發展此情況下對應的Morse理論，我們遭遇兩個主要問題：

(1) f 取值在 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$，而不在 $\boldsymbol{R}$。

(2) f 在臨界點的Hessian有無窮大的Morse指標 n^+ 和 n^-。

第一個問題不嚴重，我們可以考慮無窮循環覆蓋（infinite cyclic covering）$\mathscr{C}_0=\mathscr{A}/\mathscr{G}_0$ 以取代 $\mathscr{C}$，這裡 $\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{G}$ 的連通成份（connected component）。第二個問題較基本且引出了整個理論的新形貌。回憶黎曼幾何中短程線的古典Morse理論，Hessian 視作算子（而不是二次形）爲Laplace型，即爲一二階橢圓算子，所以有下界，n^- 爲一有限數；現在我們的狀況，Hessian是Dirac型，即它爲一階算子，事實上，這Hessian大約是算子 $*d$ 作用在 $\Omega^1/d\Omega^0$（適當地延拓到李代數値的微分式）。

克服我們困難的關鍵是察覺到在Morse理論裡的重要量不是Morse指標 n_P^-，而是關於一對臨界點 P，Q 的相對（relative）Morse指標

$$n_{P,Q}^-=n_P^- - n_Q^-$$

雖然對於所有 P，$n_P^-=\infty$，我們却可以使其差 $n_{P,Q}^-$ 有意義，即是說我們能夠定義相對Morse指標。

首先在 Y 上取一固定度量，我們能夠延拓在臨界點的Hessian到一連續族的自伴（Dirac型）算子 H_c，對所有的 $c\in\mathscr{C}$。特別地，對任一從 P 到 Q 的連續路徑，我們得到連繫 H_P 到 H_Q 的一參數族的自伴算子 H_t，在此情況下，有一標準的整數不變量，叫值譜流差（spectral flow）可被定義。（參考〔APS〕）它描述 H_P 的負固有値越過路徑變成 H_Q 的正固有値的數目，這顯然是形式量 $n_P^- - n_Q^-$ 的一種正規化（regularization），它是一個拓樸不變量，所以只由從 P 到 Q 的路徑 α 的同倫類（homotopy class）決定，如果 $\mathscr{C}$（或更精確

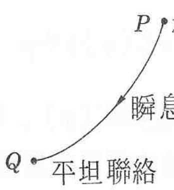
，$\mathscr{C}$ 的不可約部份）是單連通（simply connected），α 在同倫的意義下是唯一的，所以相對Morse指標 $n_{P,Q}^{-}$ 可以良好地定義（well-defined）。因爲$\mathscr{C}$不是單連通，而有無窮循環覆蓋$\mathscr{C}_0$，在同餘（modulo）「繞$\mathscr{C}$中一生成閉迴路的值譜流差」之下，可定義$n_{P,Q}^{-}$，此值譜流差可以用$Y\times S^1$上的指標定理計算得一數8。

現在至少形式上應該清楚怎麼進行了，首先假設所有（nontrivial）f 的臨界點都是非退化的，如果不，我們須做Fredholm微擾（perturbation），如Taubes在處理Casson不變量時的作法。（參考〔T〕）現在定義鏈複體C_*，賦予同餘8的指標，最後用從P到Q的∇f的軌跡線定義邊界算子∂，證明$\partial^2=0$，於是有叫Floer的同調群，表作$HF_q(Y)$，$q\in \boldsymbol{I}_8$（參考〔F2〕）。

在上述整個步驟中，∂的定義用了 ∇f 的軌跡線是極緊要的，如此的軌跡線是下列微分方程的解：

$$\frac{dA}{dt}=-*F_A$$

這裡$A(t)$是一族聯絡，F_A爲其曲率，$df=*F_A$，上式定義了$Y\times \boldsymbol{R}$上的瞬息子（instanton）。我們的邊界條件是當 $t\to-\infty$ 時，聯絡收歛到對應於P的平坦聯絡（flat connection），相似地 $t\to+\infty$ 對應於Q，Witten 解釋∂爲一種隧道效應（tunnelling effect）。我們用瞬息子從一個平坦聯絡的基態（ground state）穿越到另一平坦聯絡的基態。這是物理學家使用瞬息子的方式及他們原來的動機。由於這個原因，Witten 甚至在古典的Morse理論中，使用「瞬息子」這個字眼表示連繫相鄰臨界點的軌跡線。



3. Casson不變量

令Y如前表一定向三維同調球，Casson不變量$\lambda(Y)$粗略地可定義如下：

$$\lambda(Y)=\frac{1}{2}\{\pi_1(Y)\to SU(2)\text{的不可約表現的數目}\}$$

這裡，當然，我們把共軛（conjugate）表現視爲相同，因爲$H_1(Y)$（$\pi_1(Y)$ 的交換化（abelianization））爲零，所以在$SU(2)$中唯一的可約表現是自明（trivial）表現，即「不可約」=「非自明」。

主要問題是給一種適當方式來數表現的數目，如此得到一良好定義（且有限）的整數，Taubes發展了一種自然的幾何方式，把$\pi_1(Y)\to SU(2)$的表現與Y上自明束的平坦聯絡對等起來。令$\mathscr{C}$表淨聯絡組成的空間（參閱前文），映射$A\in\mathscr{C}\to F_A$（A的曲率）定義了$\mathscr{C}$上自然的一次微分式（1-form）F。注意$\mathscr{A}$（符號意義，參閱前文）的切向量是Y上李代數 $su(2)$ 值的一次微分式，它們自然與 $su(2)$ 值的二次微分式（如曲率）成對，即F在$\mathscr{A}$上切向量的值爲積分此切向量外乘（exterior product）F_A，再對李代數變數作縮約（contraction）。由Bianchi恒等式，由曲率所定義在$\mathscr{A}$上的$\mathscr{G}$不變的一次微分式可理解爲（descend）$\mathscr{C}$上的一次微分式。

F的零位，即平坦聯絡，自然對應$\pi_1(Y)\to SU(2)$ 的表現，所以「不可約表現的數目」變成「F零位的數目」（在$\mathscr{C}$的非奇異部份），爲使此數目有意義，我們必須考慮（如在有限維時）微擾（參考前文）以得到單零位（simple zero），然後依據定向賦予他們適當的+，−號，再加起來。

我們在$\mathscr{C}$上的一次微分式F事實上是閉的（closed），所以局部來看，它應是$\mathscr{C}$上某函

數或泛函的全微分，前節文中之 Chern-Simons 泛函 f 正好充當這個角色：

$$F=4\pi^{2}df \quad 。$$

現在很清楚 F 的零位變成 f 的臨界點，可相信 Casson 不變量（差一因子 2）就是前段文中所定 Floer 同調群的 Euler 示性數：

$$2\lambda(Y)=\sum_{q=0}^{7}(-1)^{q}\dim HF_{q}(Y)。$$

在此意義下，群 HF 可視為 Casson 不變量的精細化，故應是 Y 上有趣的不變量。

註：(1)如第一節所述，在有限維時，Floer 同調群 HF 就是底空間的同調群。但無窮維的情況則不同，上述我們對（$\mathscr{C}$, f）所得之 HF 並無關乎 $\mathscr{C}$ 本身的（通常）同調群，他們應視為某種「中間維度」（middle-dimensional）的同調群，Floer 有所謂「扭對稱Morse 理論」來討論它。

(2) Casson 不變量的原來定義（參考〔C〕）是經由三維拓樸的 Heegaard 分解（splitting），當 Y 被以其他方式描述時，Casson 用此程序以產生有效的 $\lambda(Y)$ 的算法。

4.些許規範場論

在談 Witten 對 Jones 多項式作量子場論的解釋以前，先要回憶一下他所用的**規範場論**（gauge theory）的語言。

所有規範場論的典型是電磁場，從幾何的觀點，由磁位（electromagnetic potential）a_{μ}（$\mu=1$，……，4）定義了一個 Minkowski 空間 M 上 $U(1)$ 束的聯絡，電磁場是對應的曲率

$$f_{\mu\nu}=\partial_{\mu}a_{\nu}-\partial_{\nu}a_{\mu}\ (\partial_{\mu}=\partial/\partial x_{\mu}),$$

眞空中的 Maxwell 方程讀作

$$df=0\ ,\ d^{*}f=0\ 。$$

這裡 f 視作一二次微分式，d 是外微分，d^{*} 是它的形式伴隨（formal adjoint）（相對於 Minkowski 度量）。

非交換規範場論是用一緊緻非交換李群 G，e.g. $SU(n)$，以取代 $U(1)$，一個位勢（potential）是一個 Minkowski 空間 M 上的聯絡 A，有成份 A_{μ} 為 G 的李代數值，場是曲率 F 有成份

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}+[A_{\mu},A_{\nu}]。$$

Maxwell 方程的最直接一般化是 Yang-Mills 方程

$$DF=0\ ,\ D^{*}F=0\ 。$$

規範場論有無窮維對稱群如前述之規範變換群 $\mathscr{G}$，由所有 $g: M\to G$ 之映射組成，所有物理的或幾何的性質都要是規範不變的（gauge invariant）。

決定一個物理理論的主要事情是定義一個 Lagrangian 或 action L。這是由積分一個 Lagrangian 密度所得到的,各種「場」(field，應與在Yang-Mills時的曲率區別)的泛函，譬如說，在一個純量場論（scalar field theory）中，場是純量函數 φ，最簡單的 Lagrangian 是

$$L(\varphi)=\int_{M}|\operatorname{grad}\varphi|^{2}\,dx\quad 。$$

這裡模（norm）及體積元（volume element）都是Minkowski 空間裡的。

關於 Yang-Mills 理論，我們取的 Lagrangian 是

$$L(A)=\int_{M}|F_{A}|^{2}\,dx$$

這裡的模也用了 G 上的一個不變度量。

有了 Lagrangian $L(\varphi)$，理論中的**分割函數**（partition function）是以下 Feynman 積分

$$Z=\int\exp(iL(\varphi))\mathscr{D}\varphi$$

一般，對任意給的泛函 $W(\varphi)$，「觀測量」（observable）W的未正規化期望值定義

爲

$$<W>=\int \exp(\,i\,L(\varphi))\,W(\varphi)\mathcal{D}\varphi。$$

這些Feynman 積分在數學上並非良好地被定義，但是若能純熟地使用，他們將是具有啓發性的有用工具。特別是微擾展開（perturbation expansion）可以明確地計算出來。

Feynman 積分提供一種滿足相對論不變性量子化（quantization）的方式，這是它的主要目的，在作非相對論量子場論（量子化場理論）處理時，我們用某Hilbert 空間$\mathscr{H}$上的時演化算子 e^{itH}來描述，無窮小的生成元H是理論的Hamiltonian，有形式上的規則告訴我們如何從用Feynman 積分的Lagrangian 描述方式找出Hamiltonian 描述方式中的Hilbert 空間$\mathscr{H}$和Hamiltonian H ，兩者之間的基本關係反應于下列公式：

$$\langle \exp(\,i\,TH)\varphi_0,\varphi_T\rangle$$
$$=\int \exp(\,i\,L(\varphi))\mathcal{D}\varphi\ 。$$

這裡 φ_0, φ_T 爲$\boldsymbol{R}^3$上的純量場，積分範圍爲所有場$\varphi(x,t)$滿足$\varphi(x,0)=\varphi_0$，$\varphi(x,T)=\varphi_T$，$0\leq t\leq T$。（公式左邊之φ_0（或φ_T）視爲所有場的無窮維空間上在φ_0（或φ_T）點的Delta函數）去掉始末給定的純量場，我們有

$$\mathrm{Trace}\ \exp(\,i\,TH)$$
$$=\int \exp(\,i\,L(\varphi))\mathcal{D}\varphi\ 。$$

這裡積分範圍的φ是$\boldsymbol{R}^3\times S^1_T$上的函數，$S^1_T$是長度$T$的圓。

Witten 對 Jones 理論的解釋是選取適當的 2＋1 維（我們的流形維度 3，物理上視爲 2 個空間維度，1 個時間維度）的 Lagrangian，我們將在第 6 節描述它。

在規範場論裡，古典力場是用曲率描述的，甚至當曲率爲零時，規範場論有不顯然的大域形貌。這對和我們感興趣的量子場論的關係是基本的。一個典型例子是在電子的量子論裡的Bohm-Aharonov 效應，這是關於一個螺線管裡頭有磁通量但無外面的磁場，一束電子通

過螺線管兩旁後產生干涉，指出了相移（phase-shift）現象的存在，這個物理效應發生，甚至電子在一個無作用力的區域通過。（這個效應也說明了電磁學中的位勢不只是數學上的輔助量，它是具有物理意義的。）用數學的話解釋上述效應是說電子在螺線管外面區域的波函數是一個平坦線束（flat line-bundle）的截痕（section），但繞螺線管有不單純的環移（holonomy）。

在非交換的規範場論裡，波函數是向量束的截痕且環移的值落在一非交換群上，這是拓樸與涵蓋在Jones-Witten 理論裡的量子場論之間關係的起始點。

5.結及 Jones 多項式

在三維空間裡結（knot）和結串（link）的研究純是一拓樸問題，結眞是複雜的東西，甚至用了所有當代拓樸學裡成熟的技巧，它們仍無法有一確定處理的方式，從Jones 多項式衍生出來的顯著發展便是結理論精妙的明證。

根據定義，一個結是圓在$\boldsymbol{R}^3$中的一個平滑嵌入（embedding），我們說兩個結是等價的，假如其中之一能夠連續地變形成另一個而不自我穿越，一個結串是有限個不相交結的聯集。

結理論有段有趣的歷史，在十九世紀時，物理學家沉思於原子的本質。Lord Kelvin 是當時物理學界領袖之一。他在 1867 年宣示

他充滿想像與野心的想法：原子乃以太打結的漩渦體（knotted vortex tubes of ether）（參考〔Th〕）。

有大約20年，Kelvin的漩渦原子理論被嚴肅地考慮。Kelvin的合作者P.G. Tait對結作了廣大的研究並分類，他用平面投影的交點數來看待不同的結，並且也有一些實際上的發現，後來叫“Tait的猜測”，自從Kelvin的理論被揚棄作爲一個原子理論後，結的研究變成純數學裡隱秘、冷闢的一支。

雖然在二十世紀拓樸學家對結理論作了很大的進展，但Tait的猜測直到80年代末以前仍然沒有突破，新發現的Jones多項式終於可以很容易地處理這些猜測。

現代拓樸學早期成就之一是在1928年一個結或結串的Alexander多項式的發現，雖然它無助於證明Tait的猜測，但却是非常有用的結不變量，並且大大地簡化結的有效分類，Alexander 多項式從結的餘空間（complement）的無窮循環覆蓋之同調群產生，等價地，它也可以從結的餘空間之上同調群帶著在一平坦線束裡的係數導來，這類多像Bohm-Aharonov效應的內容。

有多過50年的時間，Alexander 多項式保持是唯一此類的結不變量，所以當在1984年，Vaughan Jones 發現另一個結及結串的多項式不變量，的確對所有的專家都是一個大驚奇。

針對一個 $\boldsymbol{R}^3$ 中的結 K，我們有Jones多項式，它是一個變數 t 和 t^{-1} 的多項式，表爲 $V_K(t)$。它已正規化，所以對 $\boldsymbol{R}^3$ 中標準的不打結的圓，$V(t)\equiv 1$，另外，它有緊要的性質

$$V_{K^*}(t)=V_K(t^{-1})$$

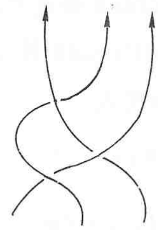
這裡 K^* 是 K 的鏡像，簡單的例子表明 $V_K(t)$ 在變換 $t\to t^{-1}$ 之下不須是不變的，所以Jones多項式有時候能夠區別結和它們的鏡像，舉例來說，右手系的三葉結(right-handed trefoil knot）有

$$V(t)=t+t^3-t^4$$

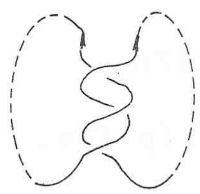
所以可區別於它的鏡像。另一方面Alexander多項式對結及其鏡像却總是相同的。

Jones多項式對一般的定向結串 L（即對 L 的每一成份賦予定向）也可定義，改變所有成份的定向並不影響它的Jones多項式，這解釋爲什麼對一個結，定向是不相關的。

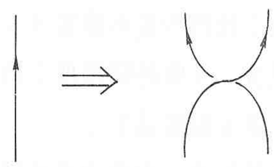
假如我們用帶著上、下交點（over/under crossings）的平面投影來表一結串，那麼 Jones多項式可以被一組關係（a skein relation）特徵化及計算出來，但Jones多項式原來是經由辮組（braid）及所謂Hecke代數的表現發現的，一個辮組是數股髮束牽引如下圖：



注意每一股髮束都向上，兩辮組以顯然的方式合成，這給出了 n 股髮束的辮組群（braid group on n strands）B_n，給一辮組 β，我們可依據標準方式（看下圖）封閉兩端而形成一個定向結串 $\hat{\beta}$。



B_n 中的共軛元素產生等價的結串，又，以一簡單扭轉增加髮束的數目如圖：

(*) 

並不影響對應的結串，一個古典的Markov定理說上列兩種方式生成了所有的結串之間的等

價方式，所以要製造一個定向結串的不變量，只須造出一個在 B_n 上(*)作用下不變的類函數（ class function ）即可。

因爲類函數由表現的示性指標（ character ）自然產生，這建議我們從考慮 B_n 的表現開始。事實上，Jones 使用來自 Hecke 代數 $H(n,q)$ 的表現，對一般的（ generic ）q 及 $H(n,q)$ 的某些不可約表現，我們都得到一個 B_n 的示性指標（ $q^{\frac{1}{2}}$ 的一個 Laurent 多項式），Jones 多項式（ $t=q$ ）是這些示性指標的適當組合。

Jones 多項式已經被以許多方式推廣，沿著上述方式但用了所有 Hecke 代數的表現可得到兩變數的多項式。

另一種更基本的方式牽涉到選擇一緊緻李群 G 及其一不可約表現。現在，一個定向結串的多項式不變量可以用 Yang-Baxter 方程的解來構造，原來的 Jones 多項式對應到 $G=SU(2)$ 及它在 C^2 上的標準表現，取 $G=SU(n)$ 對所有的 n 及它們在 C^n 上的標準表現，可得等價於前述的兩變數多項式。

Witten 的作法也牽涉到群 G 及其表現的選擇，它以一種更直接和自然的方式產生相關的多項式，又在 Witten 理論裡，我們得到在任意緊緻三維流形裡的結串的不變量，（結串可以是空集合，即得流形本身的不變量）這是一個讓人相信 Witten 方法的自然性的理由。

也許值得強調的是 Jones 多項式的代數或組合的定義是相當基本和嚴格的，但是它缺乏清楚的觀念上的解釋，這正是 Witten 理論所提供的，雖然在發展這方面理論仍有技術上的困難。

當 Alexander 多項式可以用標準的代數拓樸（同調理論）來理解，且有高維度的類似推廣的同時，Jones 多項式最好是用純三維的量子場論來理解，有一些跡象顯示：量子場論可能和更標準的幾何建構有關，但這尚待釐清。

6. 用Feynman積分來描述

這一節我們將談 Witten 站在量子場論的觀點對 Jones 多項式的解釋，令 Y 表一緊緻定向三維流形，我們仍沿用前述關於規範場論的符號。我們的 Lagrangian L 是定義在所有聯絡上的 Chern-Simons 泛函，它有明確的公式如下：

$$L(A)=\frac{1}{4\pi}\int_Y T_r(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A)$$

這裡 $A\in\mathscr{A}$，L 與前述 f 只差一倍數。

可驗證 L 在 $\mathscr{G}$ 的子群 $\mathscr{G}_0$ 下不變，但在 $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0$ 中之生成元作用下，L 不是不變的，差一個 2π 的倍數，所以，對 $k\in\mathbf{Z}$，$\exp(ikL(A))$ 是 A 的一個良好定義的函數。Witten 的三維流形不變量形式上可以定義爲「分割函數」：

$$Z(Y)=\int_{\mathscr{A}}\exp(ikL(A))\mathscr{D}A$$

這是一個非常典雅的定義只要相信右邊的積分有意義。更有甚者，考慮一閉定向曲線 $C\subseteq Y$，且固定一個 G 的不可約表現 λ，一個 Y 上的聯絡給出一種沿 Y 上任意曲線平移的概念，特別地，繞 C，我們得到一個環移的值 $Mon_C(A)$（ Mon 爲 monodromy 的縮寫），令

$$W_C(A)=T_{r_\lambda}Mon_C(A)$$

這裡 T_{r_λ} 表對表現 λ 取其跡（ Trace ），$W_C(A)$ 是熟知的叫 Wilson 線的東西，定義

$$Z(Y,C)=\int_{\mathscr{A}}\exp(ikL(A))W_C(A)\mathscr{D}A$$

這是 $Z(Y)$ 的推廣。用物理學家的語言

$$Z(Y)=\langle 1\rangle$$

$$Z(Y,C)=\langle W_C(A)\rangle$$

這裡 $\langle\ \rangle$ 表（未正規化）期望值。

當然，我們可以類似地討論若干閉曲線 C_1，……，C_r，每一條賦予不同的 G 的不可約

表現，那麼

$$Z(Y,C_1,\cdots\cdots,C_r)$$
$$=\langle W_{C_1}(A)W_{C_2}(A)\cdots\cdots W_{C_r}(A)\rangle。$$

值得注意的是上述定義不牽涉度量或體積的概念，這表示我們已經定義了拓樸的不變量。

爲了瞭解是否上述定義有任何意思，一種方式是考慮穩定相逼近（Stationary-phase approximation）$k\to\infty$，我們應該視參數 k 像 $1/\hbar$，這裡 $\hbar$ 是 Planck 常數，古典極限來自 $\hbar\to 0$。（參考〔W〕）

另一種叫 Surgery 法，是一種有效的計算我們 Feynman 積分的方式，當然如果能夠給 Chern-Simons Lagrangian 某種純組合的定義那更好。（像在格子規範（lattice-gauge）理論裡那樣）一些鼓舞來自 Reidemeister 扭率（torsion）有如此的定義，而它涉及了 Chern-Simons Lagrangian 的穩定相計算。

對於 S^3 中的結串，Jones 多項式是一個變數 $t=\exp(2\pi i/(k+2))$ 的多項式，但對一般三維流形，情況變得更複雜，Witten 不變量是否總是可以被它的 k^{-1} 展開決定並不明顯。（本文主要部分取材自 M. Atiyah 的一篇介紹文章："New Invariants of 3-and 4-Dimensional Manifolds", Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, Volume 48（1988）及其新出版的一本小書："The Geometry and Physics of Knots", Cambridge University Press.）

參考資料

〔APS〕M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry Ⅲ, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 79（1976），71～99.

〔C〕A. Casson, An invariant for homology 3-spheres, *Lectures at MSRI*, Berkeley, 1985.

〔F1〕A. Floer, Witten's complex and infinite dimensional Morse Theory, *J. Diff. Geom.* 30（1989）207～221.

〔F2〕——, An Instanton-Invariant for 3-Manifolds, *Commun. Math. Phys.* 118（1988）215～240.

〔T〕C. H. Taubes, Casson's invariant and gauge theory, *J. Diff. Geom.* 31（1990）547～599.

〔Th〕W. H. Thomson, On vortex motion, *Trans. R. Soc. Edin.* 25（1869）217～260.

〔W〕E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* 121（1989）351～399.

後記：承編輯百般請託，復感教育傳播或應爲研究工作者之社會責任，且拓樸之研究，特別是微分拓樸或者幾何拓樸這麼有趣且重要的方向在國內仍乏人問津，故願爲此文以勵後進。

—本文作者任職於中央研究院數學研究所—