數學競賽中的名題欣賞——

同色三角形問題

孫自行

1947年，匈牙利中學生數學奧林匹克有如下試題（題1）：

題1：證明，世界上任意六個人中，總有三個人相互認識，或者相互不認識。

此題一經問世，立刻便引起人們極大的興趣，特別是對從事各級數學競賽的數學家，數學教育學家以及組合數學的專家們更富有極大的吸引力。

1953年，美國普特南（Putnam）大學生數學競賽選用了這道試題；1955年，國際著名的組合數學專家，加拿大的格林伍德（R.E. Greenwood）教授、格里遜（A.M. Gleason）教授專門撰寫論文介紹並推廣了此題；1958年權威的國際數學雜誌《美國數學月刊》將此題收入，並列爲問題E1321廣泛徵求其解答；此題的種種不同敍述形式，等價命題以及其推廣經常被用作各種級別的數學競賽試題，如1964年在莫斯科舉行的第六屆國際數學奧林匹克（簡稱爲IMO），就有一題爲題1的推廣改造形式（見下題2）。此後如波蘭的1976年國家數學奧林匹克，美國的全美中學生數學奧林匹克都出現了關於題1同色三角形問題的推廣問題（見下題4，題5）。至於在近年來的國際數學奧林匹克（IMO）關於同色三角形或用同色三角形問題解題的題目更是非常頻繁了。例，1978年，第20屆IMO試題（見下題3）；1979年，第21屆IMO第2題；1982年，第24屆IMO第4題（參見常庚哲：“抽屜原則”，（《數學奧林匹克輔導講座》），龔升主編，科學出版社，1988，7）等。

沒有接觸過此題（題1）的讀者也許以爲此題一定是難度非常大的題目，其實並非如此！事實上它要比你想像的簡單得多，在當前出版的各種有關數學競賽的書籍中，隨便你翻開那一本，幾乎都可以看到這個題目或其等價命題。（例《高中數學競賽輔導講座》（常庚哲編，上海科技出版社，1987，5），《數學奧林匹克輔導講座》（龔升主編，科學出版社，1988，7），《數學奧林匹克解題研究》（梅向明，張君達主編，北京師院出版社，1988，7），《初中數學競賽輔導講座》（嚴鎮軍等編，上海科技出版，1987，4），《初中數學競賽跟踪輔導》（劉詩雄等編，華中師大出版社，1988，10）。不但如此，就連小學生的數學競賽訓練也要講這個非常漂亮的題目。1987年4月由北京師範學院出版社出版的北京市數學奧林匹克學校小學部的訓練教材——《小學數

學奧林匹克專題講座》一書也收進了此題作爲例題。上述這些也許可以足以表明該題並非以難度大而著名。事實上據筆者的經驗小學高年級的優秀學生對於本題的解題思想和方法是完全可以接受的。其實質是同色三角形問題。

用圖論的拉姆賽（ Ramsey ）數問題，可以把這類問題解決得較爲深入。囿於篇幅以及不至於把問題的面涉及得更寬更複雜，以下我們幾乎不涉及圖論的專門知識而希望向讀者做更通俗的介紹。

讓我們看一看它的證明方法，你會發現它的確是很美的！

證明：設任意選定的 6 人分別以 A_1，A_2，…，A_6點表示，如圖 1 。若兩人認識則在該兩點之間連紅線（圖中以實線表示），否則（即若兩人不認識）在該兩點之間連綠線（圖中以虛線表示）。這樣對於任何一點同其餘點之間都要連線。例如 A_1，它同A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 之間共要連五條線，或紅或綠，染二種顏色，5條線，至少有一種顏色染三條（或三條以上）。（或者換個說法：把5 個蘋果放在二個抽屜裏，至少有一個抽屜裏落入三個（或三個以上）的蘋果。這就是著名的抽屜原理。）不妨設 A_1A_2，A_1A_4，A_1A_5 三條線染色相同，爲紅色。這時再考察 A_2，A_4，A_5 三點之間的連線情況，只有以下兩種情況：

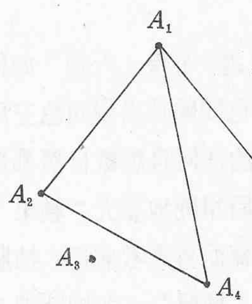


圖 1

(1)其中有一條（或一條以上）爲紅色，例如 A_2A_4 爲紅色，這時出現了△ $A_1A_2A_4$ 爲紅色三角形，如圖1 。即 A_1 ， A_2，A_3 三人相互認識。

(2)沒有一條爲紅色。則這時三點之間的連線全爲綠色，因此出現了綠色三角形 $A_2A_4A_5$ 。如圖 2 。

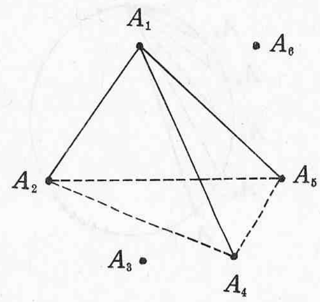


圖 2

此表明，不管何種情況，總會出現一個同色三角形。就是說在任意 6 人中總可以找到三人，其相互認識（紅色三角形），或可找到三人，其相互不認識（綠色三角形）。

解決本題的關鍵是使用了抽屜原理，加之使用了“染色”的方法，最後歸結爲同色三角形的存在問題，使得問題解決得是那麼優美、那麼協調、那麼簡單直觀。

事實上這樣一個簡單的抽屜原則及有限的染色方法（即只用到一點點的染色知識）對解決這一類題目是很有用的。

下面看一下題 2 是如何在圖 1 的基礎上推廣的。

題 2：（ 1964，莫斯科，第 6 屆國際數學奧林匹克第 4 題）

17位科學家每一個和所有其他人都通信。在他們的書信往來中僅僅討論三個題目，而每兩個科學家僅僅討論一個題目，證明：至少有三個科學家，他們互相討論同一個題目。

證明：記 17 位科學家分別爲 A_1，A_2，……，A_{17} ，記三個題目分別爲 X ，Y ，Z ，任一位科學家例如A_1同其餘科學家討論的題目分別爲三個題目 X ，Y ，Z之一。由抽屜原理，必有 6 個與A_1分別討論同一個題目，設爲X。

不妨設這 6 位科學家分別為 A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7。如圖 3 。對 A_2，A_3，A_4，A_5，

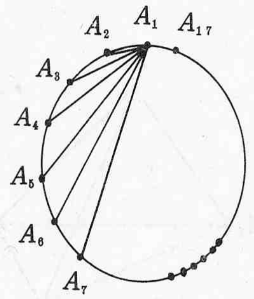


圖 3

A_6，A_7 這六位科學家所討論的題目只有以下兩種情況：

(1)其中至少有兩位討論題目 X；

(2)沒有任何兩位討論題目 X 。

對於(1)，不妨設 A_2，A_3 討論了題目 X，這時 A_1，A_2，A_3 相互之間均討論題目 X，即出現了同色三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 。

對於(2)，在 A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7 這六位科學家之間只能討論二個題目，由題 1 同樣存在同色三角形。

因此在17位科學家之中至少有三位科學家在他們的通信中討論同一個題目。

比較題 1 ，那裏或者認識或者不認識，從染色的觀點說在連線或染紅色或染綠色是二染色問題：而本題共討論三個題目，如果按討論同一個題目對應一種染色，這裏是三染色問題，但這並不可怕，事實上我們先抓住一點（例 A_1）入手可確定至少有 6 位科學家與 A_1 分別討論了題目，例 X。這是一個關鍵，進一步把問題歸結為或者有同討論 X 的同色三角形，或者成為題 1 中二染色問題的同色三角形（同 Y 或同 Z）。

能否在所討論題目數不變的情況下把條件“17位科學家”的數字 17 換得小一些？例如16。考慮16點中的任一點同其他點的連線，共15條。使用抽屜原則的時候三個題目相當於 3 個抽屜，15條連線相當於 15 個蘋果。把15個蘋果放入到三個抽屜裏，就不能保證一定會有 6 個（或 6 個以上）放入到一個抽屜裏了！因為我們可以按平均的放法把每個抽屜裏恰好放入 5 個。就是說，按照這種方法（題 1 或題 2 中，選定一點，使用抽屜原理，歸結為同色三角形的做法）不能把這類問題的數字 17 換得更小一些。但我們不能因此說數字 17 是三染色（共討論三個題目）問題必出現同色三角形的最小數字（即上述 17 是使問題成立的充分條件，但還不能肯定是必要條件）。然而，有人給出數字為 16 時有不存在同色三角形的圖（參見常庚哲等編《高中數學競賽輔導講座》，上海科學技術出版社，1987，5．），因此，我們現在可以說，“17”是任意三染色必存在同色三角形的最小數字。

數字 17“退”不得，“進”如何？由上述“17”是三染色問題必出現同色三角形的最小數字，大於 17 的任何自然數自然都是沒有問題的，就是說這時單純地擴大“蘋果”數是沒有多大意義的。轉而再來考慮把“抽屜”數增大。若增加一個“抽屜”，並同時把“蘋果”數增加至 65 個，根據上面題 2 的做法，可保證最終必出現同色三角形，此時點數（即題 2 中的科學家數）增加至 66 個，題 2 被改作“共有 66 位科學家，其中每一個和其他所有人通信，他們通信中只討論 4 個題目，且每兩個科學家之間只討論一個題目。求證：至少有三位科學家相互之間討論同一個題目。”

要解決這個題目是不困難的，把 66 位科學家分別標以 A_1，A_2，……，A_{66}，不妨先考察 A_1 同其餘 65 位科學家的“點”的“連線”，由抽屜原理，$[\frac{65}{4}]+1=17$，因此必有 17 條具有某相同色。不妨設連線的另一端點為 A_2，A_3，……，A_{18}，若此 17 點有兩點的連線的染色同他們與 A_1 的連線的染色相同，不妨設是

A_2，A_3，這時△$A_1A_2A_3$ 爲一同色三角形。否則，即此 17 點中任何兩點之間的連線均不與A_1的連線的染色相同，則此時此 17 點兩兩之間的連線只可能出現三種顏色（相互討論三個確定的題目），則問題歸結爲題 2 的三染色問題，這時同樣會出現同色三角形。

一般地，我們有如下的

定理 1：設有M個點，在兩兩之間的連線上任意染n種顏色C_1，C_2，……，C_n 之一存在同色三角形，那麼對$(n+1)(M-1)+2$個點，在各連線上任意染$n+1$種顏色C_1，C_2，……，C_n，C_{n+1}之一，也必有同色三角形。

其證明完全類似於上述 17 點問題（題 2）或 66 點問題（上述題 2 的改造）的做法。這幾乎是機械的。

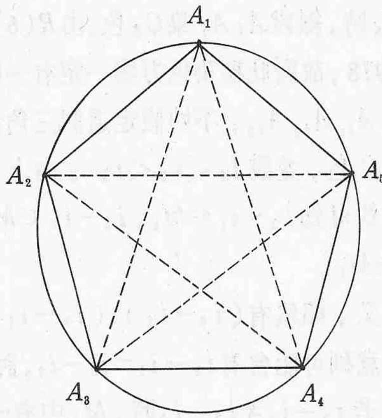
證明：設$(n+1)(M-1)$個點分別爲A_1，A_2，……，$A_{(n+1)(M-1)+2}$。先取定一點A_1，A_1同其餘$(n+1)(M-1)+1$點的連線共$(n+1)(M-1)+1$條，並任意染$n+1$種顏色之一，由抽屜原理其中必有$\left[\frac{(n+1)(M-1)+1}{n+1}\right]+1=M$條染色相同，不妨設$A_1A_2$，$A_1A_3$，……，$A_1A_{M+1}$ 都染了第$n+1$種顏色C_{n+1}，以下考慮點A_2，A_3，……，A_{M+1} 之間兩兩連線的情況，只有以下兩種可能：

⑴在這些連線中至少有一條染了第$n+1$種顏色C_{n+1}，例如A_2A_3，這時△$A_1A_2A_3$爲C_{n+1}色三角形，定理得證。

⑵與⑴相反，點A_2，A_3，……，A_{M+1} 之間兩兩連線無一染C_{n+1} 色，這時這些連線只能染n種顏色C_1，C_2，……，C_n之一，此問題歸結爲假設條件M點染n色的問題，由假定條件這時存在同色三角形，命題爲真。

若用$R(n)$表示任意n染色必有一同色三角形的最少點數。例，據定義$R(1)=3$，$R(2)=6$（注意，題 1 只是充分性，由此$R(2)\leqslant 6$，但有人給出 5 點，二染色，不存在同色三角形的圖，所以$R(2)\geqslant 6$，即$R(2)=6$），$R(3)=17$（題 2 及其後的討論）。由定理 1 立刻得到

定理 2：$R(n+1)\leqslant (n+1)[R(n)-1]+2$



上面已經給出$R(1)=3$，$R(2)=6$，$R(3)=17$。由此定理我們還可作如下估計：

$R(4)\leqslant 4(R(3)-1)+2=66$

$R(5)\leqslant 5(R(4)-1)+2\leqslant 5(66-1)+2=327$

$R(6)\leqslant 6(R(5)-1)+2\leqslant 6(327-1)+2=1958$

………

用$R(6)$的這個估計，可以解決很有名的被稱作“國際社團”問題的國際數學奧林匹克試題。並使得問題的證明的篇幅大爲縮短，比起該題的其他證法，可以算得上精彩之極了。

題 3：（1978，羅馬尼亞，第 20 屆國際數學奧林匹克試題）

一個國際社團的成員來自六個國家，共有成員 1978 人，用 1，2，3，……，1977，1978 編號，證明：該社團至少有一個成員的號數與他的兩個同胞的號數之和相等或是另一個同胞的號數的兩倍。

分析：本題等價於：1978 個點，把兩兩之間的連線任意染 6 色之一，必有一同色三角形，該三角形的三個頂點的編號滿足：其中一個點的編號數爲另兩頂點編號數之和或爲另一頂點編號數的兩倍。

證明：把 1978 個數任意分成六個數集M_1

，M_2，M_3，M_4，M_5'，M_6，對應於1978個數，在圓周上取點A_1，A_2，A_3，……，A_{1978}。用六種顏色C_1，C_2，…，C_6之一染這些點間的兩兩連線，染色方法規定如下：當且僅當$|i-j|\in M_K$時，線段A_iA_j染C_K色。由$R(6)\leqslant 1958<1978$，故對此種染色方案一定有一同色三角形$\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$，不妨假定這個三角形的三邊均爲$C_1$色，並設$i_1<i_2<i_3$。由上規定的染色方法可知$i_2-i_1\in M_1$，$i_3-i_2\in M_1$，$i_3-i_1\in M_1$。

又，顯然有$(i_2-i_1)+(i_3-i_1)=i_3-i_1$，注意到可能會有$i_2-i_1=i_3-i_2$，討論如下：

若$i_2-i_1\neq i_3-i_2$時，M_1中有一數i_3-i_1，其是M_1中另外兩數i_2-i_1，i_3-i_2之和；

若$i_2-i_1=i_3-i_2$時，M_1中有數i_3-i_1，其是M_1中數$i_2-i_1(=i_3-i_2)$的2倍。因此命題得證。

利用同色三角形問題不僅使本題的證明非常簡捷，明確，而且可把1978降至1958。(這在證明過程已經體現出來，由$R(6)\leqslant 1958$，把條件"1978"改作"1958"結論仍然成立)。又有材料表明$R(4)\leqslant 65$而且有人指出$R(4)\geqslant 65$，因此$R(4)=65$。(參見嚴鎮軍等編《初中數學競賽輔導講座》，上海科學技術出版社，1987，4)。這樣利用定理2有

$$R(5)\leqslant 5(R(4)-1)+2=322$$

$$R(6)\leqslant 6(R(5)-1)+2\leqslant 6(322-1)+2=1928$$

這比前述$R(6)\leqslant 1958$的估計就更精確了，因此我們還可以把題3中的1978再降至1928，結論仍然成立。

我們還可以進一步使用同色三角形問題及染色技巧去解決一些數學奧林匹克中的一些名題。

題4：(1976，華沙，波蘭數學奧林匹克試題)

平面上六點，任何三點都是一個不等腰三角形的頂點，求證，這些三角形中有一個其最短邊同時是另一個三角形的最大邊。

分析：這又是一個"六點"問題，但不明顯具備二染色問題的特性。因一個三角形有三條邊。一個三角形的邊也可以是另一個三角形的邊，如何染色，聯繫題1的做法，關鍵是如何將這些三角形的邊分成兩類，一類染紅色，一類染綠色。

爲使在邊染色時不出現無色或雙色線段，設計如下方案：每一個三角形的最大邊先染紅色(注意由於先後的關繫，這就不會使一條染二種顏色)，而後把剩餘的全部染作綠色(這樣不會出現無色線段)。這樣，此問題已經轉化爲題目條件限制下的六點，兩兩連線，二染色(因上做法使每一條線不染紅就染綠)。由題1的結論，必有同色三角形出現，且必是紅色三角形(因每個三角形已先被染了一條紅邊，所以不會是綠色三角形)。則這個紅色三角形的最小邊即符合題目的結論。(是這個紅色三角形的最小邊，但因其被染紅，卻是另外某個三角形的最大邊)。

證明略去。

題5：(美國數學競賽題)

九名數學家在一次國際數學會議上相遇。他們當中任何三個人中至少有二人能講同一種語言，而且每人最多能講三種語言。試證明：至少有三個數學家能講同一種語言。

分析：本題不同於題1是二染色問題(要麼認識，要麼不認識)，也不同於題2爲三染色問題(總共只討論三個題目)，這裏雖然每人最多只能講三種語言，但九名數學家總共涉及多少種語言就很難說清楚了(範圍1～27)！因此這裏不好再像題1題2那樣簡單地用一下抽屜原理而歸結爲同色三角形問題了。首先必須像題3題4那樣，設計一種方案，完成問題的轉化。

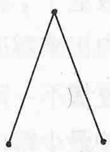
準備：規定一種顏色C_0表示兩位數學家之

間不能通話，其它語言分別用顏色C_1，C_2，……，C_n表示 （這裏C爲英文單詞“顏色— colour”的第一個字母）。若某兩位數學家之間可用若干種語言通話，則規定這兩位數學家的點的連線用可通話的數種顏色之一染色。這樣就使得每兩點之間的連線染且僅染一種顏色。顯然有以下幾點結論：

1.不存在C_0色的同色三角形（因任何三人中至少有兩人能講同一種語言）。

2.每個點作爲頂點引出的線段中，除C_0色外最多只可能染三種顏色（因每人最多能講三種語言）。

3.若某個三角形含有兩條同色（非C_0色）邊，則第三邊也同色。（由傳遞性）如下圖。



則問題成爲：空間九個點兩兩連線，用C_0，C_1，C_2，……，C_n 種顏色去染各邊，每邊只染一種顏色，證明必有同色（非C_0色）三角形。

證明：若不存在非C_0色的同色三角形，由上述結論3，知自一點發出的線段中任意兩條均不同色（非C_0色），現考慮自A_1點引出的8條線段中，由結論2至少有5條爲C_0色。不妨設爲A_1A_2，A_1A_3，……，A_1A_6 均爲C_0色。如圖4 。

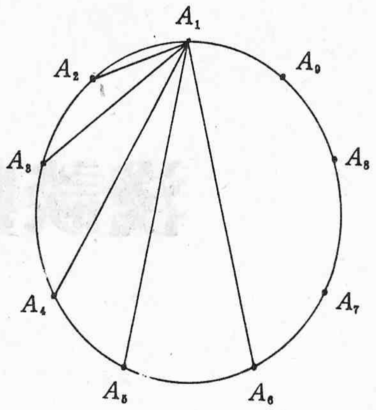


圖4

再考慮A_2，A_3，……，A_6這 5 點兩兩之間連線的情況，由結論 1 ，每一條必不爲C_0色。但由題目條件A_2，A_3，……，A_6這5點中任意一點例如A_2，它向其餘四點連線共有4 條，因此又必有一條爲C_0色（結論 2）。這樣就出現了矛盾。此表明，假定不存在非C_0色的同色三角形是不能成立的。即存在非C_0色的同色三角形。對照顏色的規定即是說題目結論成立。

關於同色三角形問題的應用以及涉及圖論Ramsey 數問題所討論的同色三角形存在性及個數問題，有關書籍上都有較好的討論。請參見《組合基礎》、《數學奧林匹克解題研究》（以上兩書均由梅向明，張君達主編，1988，北京師範學院出版社）等。

——本文作者任敎於大陸
安徽阜陽師院數學系——