機會均等的一些結果探討

潘振輝

如果一袋中放有相同大小的紅球 5 個、白球 3 個。每次自袋中取出一球，取球的機會均等，在每次取出球視後放回的條件下，顯然的，每次取得紅球的機率均為$\frac{5}{8}$；在每次取出球視後不放回的條件下，可分別求得如下：

第一次取球即得紅球的機率

$$=\frac{5}{8}$$

第二次取球得紅球的機率

＝第一次、第二次各取一球均得紅球的機率＋第一次取球得白球且第二次取球得紅球的機率。即為

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{8}$$

第三次取球得紅球的機率

＝前三次均取得紅球的機率＋第一、第二次各取得一紅球、一白球且第三次取球得紅球的機率＋第一、第二次各取得一白球且第三次取球得紅球的機率。即為

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$$

$$=\frac{5}{8}$$

第四次，第五次，……，第八次取球得紅球的機率也可由上述的類似求法，求得其機率均為$\frac{5}{8}$。

其實，可以由另一觀點來看，將取出球的樣式看成 5 個紅球、3 個白球排成一列共有$\frac{8!}{5!3!}$法。

第 k 次取球得紅球可看成第 k 個排紅球，其餘 4 個紅球、3 個白球任意排成一列共有$\frac{7!}{4!3!}$法。

故第 k 次取得紅球的機率為$\dfrac{\frac{7!}{4!3!}}{\frac{8!}{5!3!}}=\frac{5}{8}$。

一般來說，一袋中放有相同大小的紅球 m 個，白球 n 個，每次自袋中取出一球，取球的機會均等，在每次取出球視後不放回的條件下，第 k 次（$1\leq k\leq m+n$）取球得紅球的機率均為

$$\frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{m}{m+n}$$

同理，第 k 次取球得白球的機率均爲

$$\frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{n}{m+n}\text{或}1-\frac{m}{m+n}=\frac{n}{m+n}$$

即使有兩種以上的顏色球 A_1，A_2，…… A_t 各有 m_1，m_2，$\cdots m_t$ 個，在取球機會均等，每次取出一球視後不放回的條件下，第 k 次（$1\leq k\leq m_1+m_2+\cdots+m_t$）取一球得 A_i 色球的機率均爲

$$\frac{\dfrac{(m_1+m_2+\cdots+m_i+\cdots+m_t-1)!}{m_1!m_2!\cdots(m_i-1)!\cdots m_t!}}{\dfrac{(m_1+m_2+\cdots+m_i+\cdots+m_t)!}{m_1!m_2!\cdots m_i!\cdots m_t!}}$$

$$=\frac{m_i}{m_1+m_2+\cdots+m_t}\quad 1\leq i\leq t\ ,\ t\in N$$

更簡明的，將在第 k 次取出球與所設定顏色 A_i 不同的各色球全看作另一種同色球。此時的問題即與紅球 m 個、白球 n 個的情況相同且第幾次取球得同色球的機率均相同。

現有 k 個人分別在放有 k 支籤的袋中，按前後順序任意抽取一支籤。如果抽出後不再放回，每支籤被抽出的機會均等，可斷言：不論中籤數多少或中籤者分成幾種等級，每個人抽中的機會均等且抽中那種等級的籤也是機會均等。因此，在某些場合，用抽籤方式來決定某些事情，應該是相當公平的。

另外，可利用上面論及「第 k 次抽取一球得 A_i 色球的機率等於第一次抽取一球得 A_i 色球的機率」的概念來處理下面幾個問題。

問題一：一袋中有大小形狀相同的 3 個紅球、4 個白球，每個球被取出的機會均等。由此袋中每次取出一球，視後不放回，問紅球先被取完的機率爲何？

解法一：樣本空間 S 表 3 個紅球、4 個白球依任意順序被抽出的情形

$$n(S)=\frac{7!}{3!4!}$$

事件 A 表紅球先被取完，即最後取出一球爲白球的情形

$$n(A)=\frac{6!}{3!3!}$$

$$\text{故}\ p(A)=\frac{n(S)}{n(A)}=\frac{4}{7}$$

解法二：考慮紅球先被取完即是最後一次（第 7 次）抽取一球必定是白球。故

$$p(\text{第 7 次取一球得白球})=\frac{4}{3+4}=\frac{4}{7}$$

即爲所求。

問題二：一袋中有大小形狀相同的 3 個紅球、4 個白球、2 個黑球，每個球被取出的機會均等。由此袋中每次取出一球，視後不放回，問紅球先被取完的機率。

解法一：樣本空間 S 表 9 個球依任意順序被抽出來

$$\therefore n(S)=\frac{9!}{4!3!2!}=1260$$

事件 A 表紅球先被取完，可討論如下，前面的色球任意排

①最後抽出黑白或白黑

$$\frac{7!}{3!3!1!}\times 2=280\text{（種）}$$

②最後抽出黑白白

$$\frac{6!}{3!2!1!}=60\text{（種）}$$

③最後抽出白黑黑

$$\frac{6!}{3!3!}=20\text{（種）}$$

④最後抽出黑白白白

$$\frac{5!}{3!1!1!}=20\text{（種）}$$

⑤最後抽出黑白白白

$$\frac{4!}{3!1!}=4\text{（種）}$$

$$\therefore p(A)=\frac{280+60+20+20+4}{1260}=\frac{32}{105}$$

解法二：紅球先被取完的可能的情況分爲兩種

①最後一次取黑球且最後第二次或以前紅球比白球先被取完。

②最後一次取白球且最後第二次或以前紅球比黑球先被取完

①與②兩種情況互相排斥，故

所求機率爲$\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{32}{105}$

在解法二中，尚需說明最後第二次或以前紅球比白球先被取完與黑球的個數無關。同理最後第二次或以前紅球比黑球先被取完與白球的個數無關。亦即一袋中有 3 個紅球、4 個白球、m 個黑球，每次取出一球，各個球被取的機會均等，全部的取法爲

$$\frac{(3+4+m)!}{3!4!m!}=\frac{7!}{3!4!}\times\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}\qquad(A)$$

可視爲先排 3 個紅球、4 個白球共有$\frac{7!}{3!4!}$法，再將 m 個黑球逐個插入 8 個間隔中有$\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}$法，相乘而得。同理可將紅球比白球先被取完視爲先排 3 個紅球、4 個白球且最後一個必爲白球有$\frac{6!}{3!3!}$法，再將 m 個黑球逐個插入 8 個間隔中有$\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}$法，共有

$$\frac{6!}{3!3!}\times\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}\qquad(B)$$

由上面 $(A)(B)$ 二式知，紅球比白球先被取完的機率爲

$$\frac{\frac{6!}{3!3!}\times\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}}{\frac{7!}{3!4!}\times\frac{8\cdot 9\cdot\cdots(7+m-1)(7+m)}{m!}}=\frac{4}{7}$$

此即一袋中有 3 個紅球、4 個白球在每個球被取的機會均等，逐次取一球，最後一次取球得白球的機率。

推廣到一般情形，一袋中有 ℓ 個紅球、n 個白球、m_1 個 A_1 色球、m_2 個 A_2 色球，…，m_k 個 A_k 色球。在取球的機會均等的條件下，逐次取出一球。紅球比白球先被取完（不比較其他色球）的機率爲

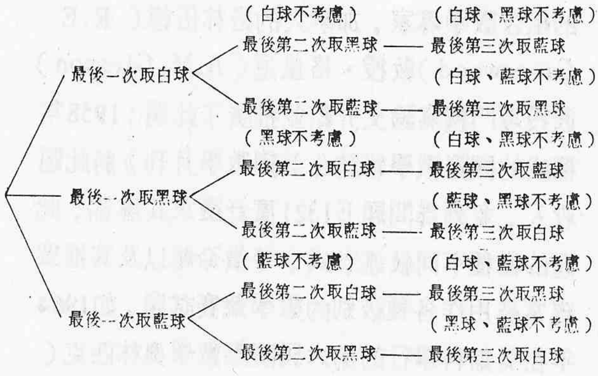
$$\frac{\frac{(\ell+n-1)!}{\ell!(n-1)!}\times\frac{(\ell+n+1)(\ell+n+2)\cdots(\ell+n+m_1+m_2+\cdots+m_k)}{m_1!m_2!\cdots m_k!}}{\frac{(\ell+n)!}{\ell!n!}\times\frac{(\ell+n+1)(\ell+n+2)\cdots(\ell+n+m_1+m_2+\cdots+m_k)}{m_1!m_2!\cdots m_k!}}$$

$$=\frac{n}{\ell+n}$$

顯然的，與其他 A_1、A_2、… A_k 各色球的球數無關。更重要的結果是此項機率恰好是由一袋中有 ℓ 個紅球、n 個白球，在取球的機會均等的條件下，逐次取出一球且最後一次取球得白球的機率。

問題三：一袋中有大小形狀相同的 3 紅球、4 白球、2 黑球、2 藍球，每個球被取出的機會均等。由此袋中每次取出一球，視後不放回，問紅球先被取完的機率？

解：每次取出一球，視後不放回且紅球先被取完的情況的各種情形，討論如下：



$$\text{所求機率}=\frac{4}{11}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{11}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{11}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{11}\times\frac{2}{9}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{11}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{11}\times\frac{2}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{32}{165}$$

如果一袋中球數、顏色種類更多仍可應用樹形圖來討論各種情形並依每次取球機會均等的概念來求解此類的問題。