立體數學遊戲與空間想像力之訓練

黃毅英

空間想像力

數年前，RUBIK 發明之「匈牙利幻立方」(Hungarian Magic Cube)(圖一)風靡一時。它引人入勝之處除了一人可玩和可隨身携帶外，主要亦因它是少數三維度遊戲之故。

事實上，空間想像力是數學教育主要目標之一。不少地區均以運算能力、邏輯思維能力和空間想像力定為學校數學教學之三大目的〔1〕、〔2〕、〔4〕，以此三種能力奠定學生分析和解決問題的能力。

空間想像力不止與數學能力直接有關〔21〕，在Lord〔19〕的文獻中亦指出空間想像力與創造思維、物理、化學、生物、地理和天文的學習均有關係。

另一方面，遊戲常可促進數學學習，尤對數學恐懼者〔9〕。田尼氏(Dienes)便提出數學概念可透過：

㈠自由玩耍(Free Play)

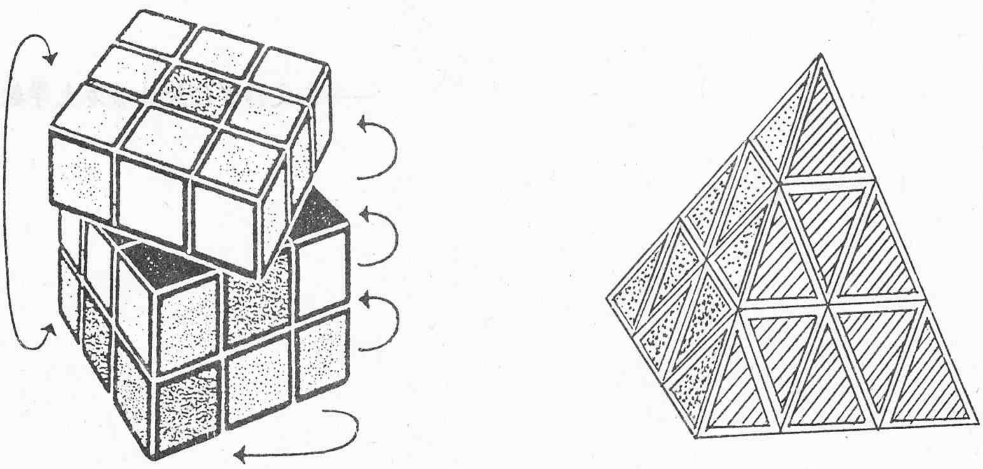
㈡有規律遊戲(Games)

㈢找尋共同結構(Searching for Communalities)

㈣描述或圖示(Representation)

㈤符號化(Symbolization)

㈥形式化(Formalization)

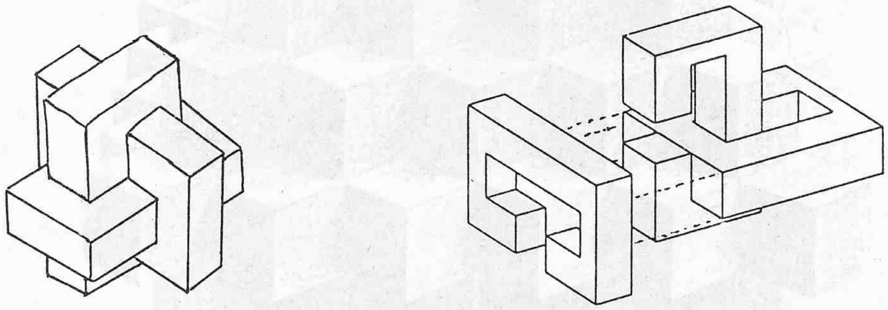


圖一　匈牙利幻立方及幻金字塔

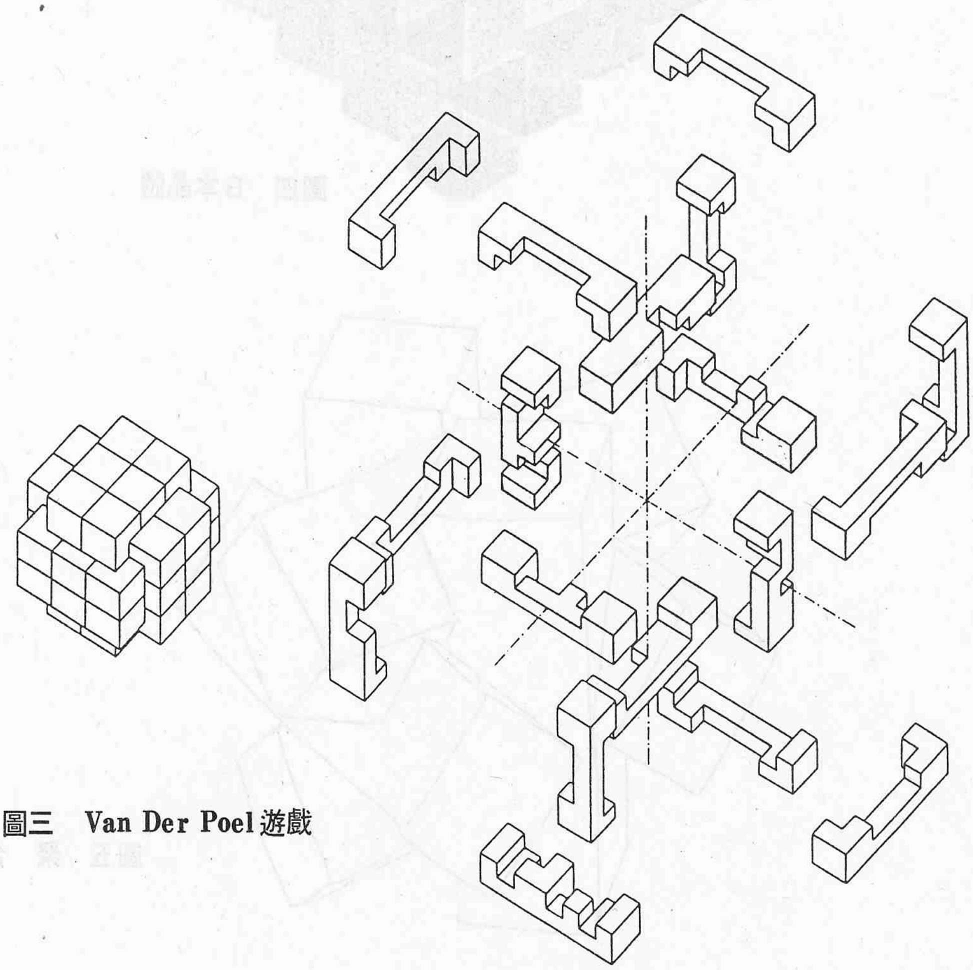
六個階段形成〔14〕。對於較難掌握的立體空間想像力，數學遊戲便能發揮更大作用了，可惜常見的數學遊戲之中，涉及三維度的不多。本文即搜集了近十種容易自行製作的立體數學遊戲，希望學生能透過這些遊戲更能開發左腦，善用第三維度。

裝嵌遊戲

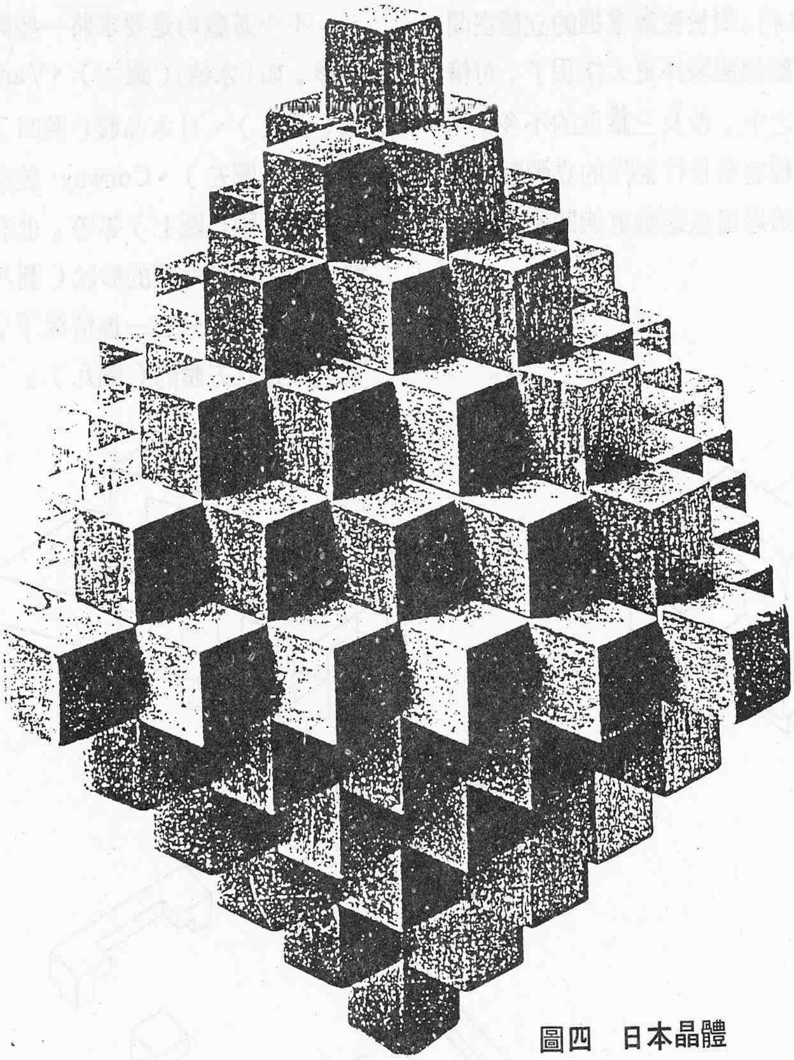
不少遊戲均是要求將一些碎塊裝嵌成立體圖形，如「木結」(圖二)、Van Der Poel 遊戲(圖三)、日本晶體(圖四)、聚合(Cluster)(圖五)、Conway 裝嵌問題(圖六)、中國立體(圖七)等等。也有將立體切成八塊、構成世界地圖的形狀(圖八)、亦有細塊之內藏磁石，只在一種情況下，細塊才能互相牽引成大立方體的(圖九)。



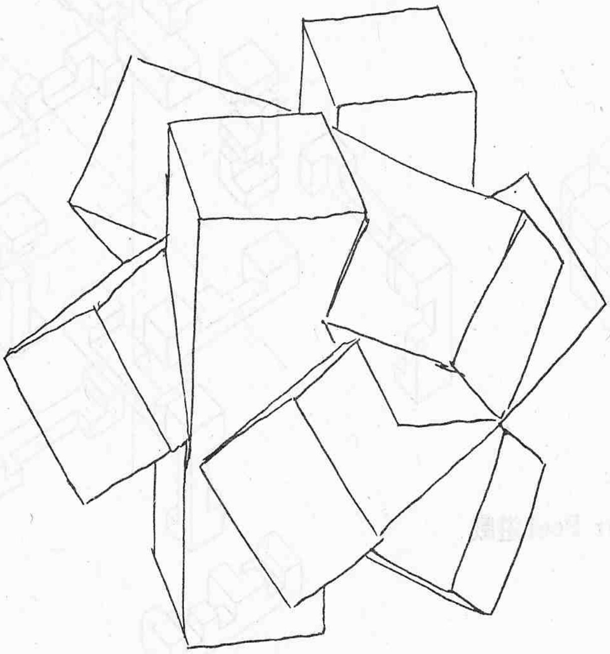
圖二　木　結



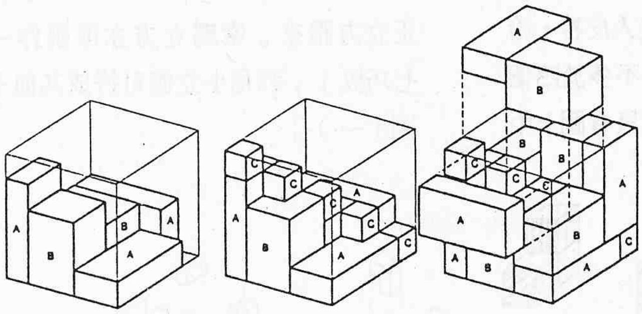
圖三　Van Der Poel 遊戲



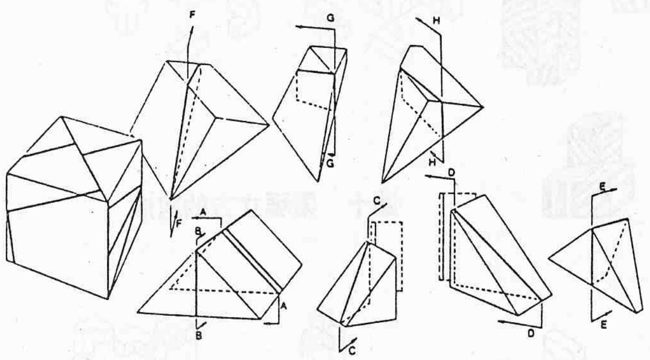
圖四　日本晶體



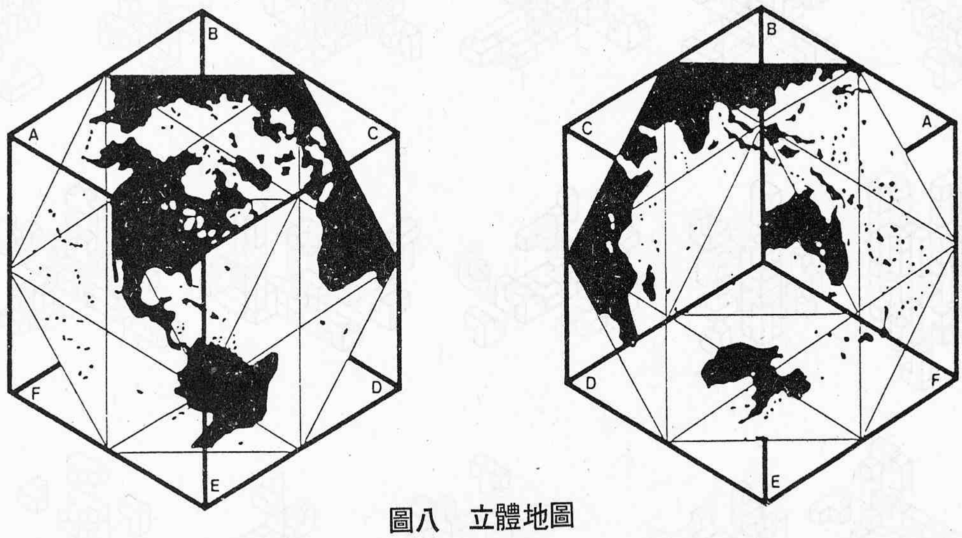
圖五　聚　合



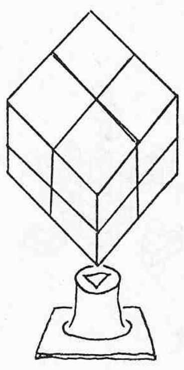
圖六　Conway 裝嵌問題



圖七　中國立體

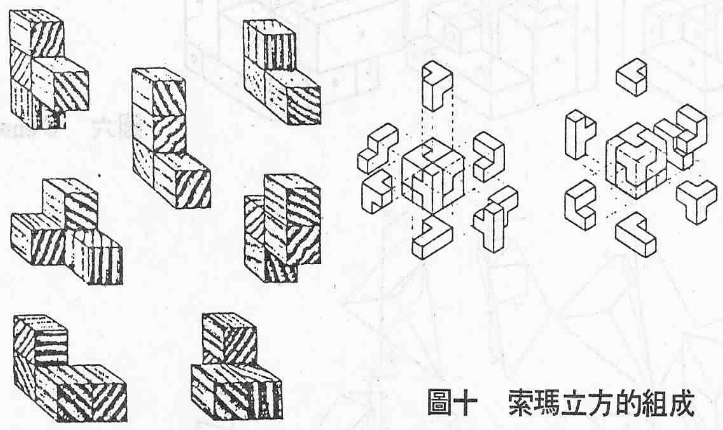


圖八　立體地圖

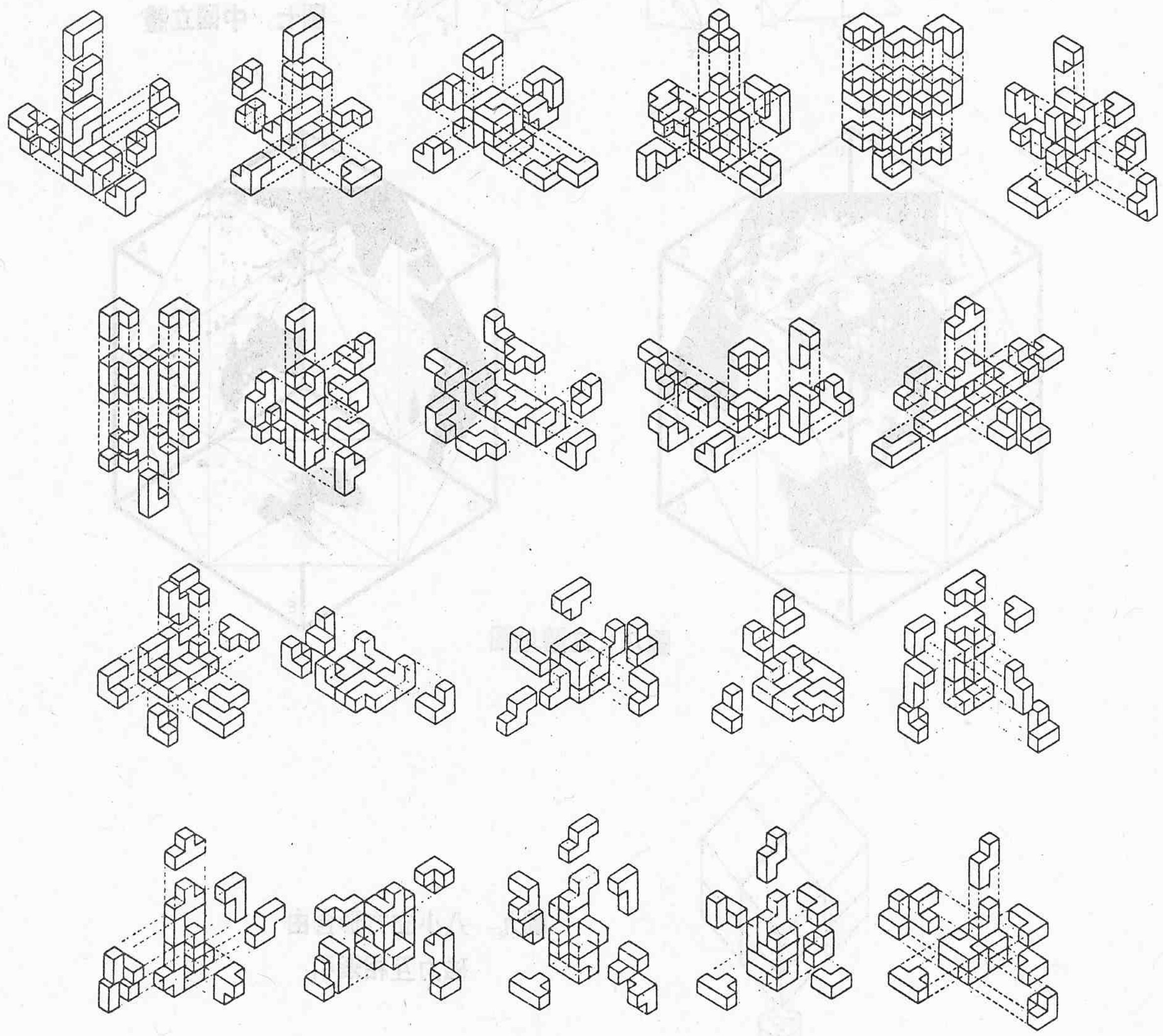


圖九　八小立方形合由
磁力互相牽引

這些裝嵌遊戲中，最著名的要算是索瑪立方(Soma Cube)了。它是甘麥人皮特‧哈因(Piet Hein)的設計。若要由不多於四個小立方體拼成有凸有凹的立體，就只有圖十中的七個可能。這七個立體就剛巧能拼回一個大正立方體來。索瑪立方亦可視作一種「立體七巧板」，利用小立體可拼成其他不少形狀(圖十一)。

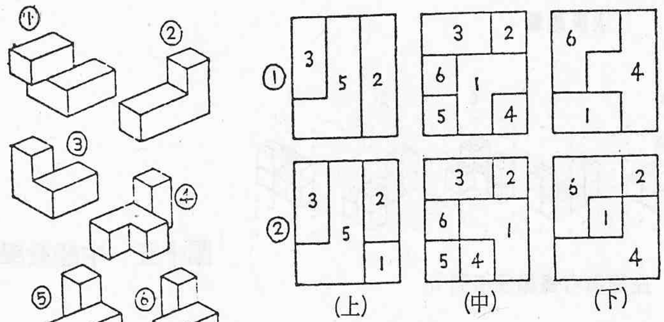


圖十　索瑪立方的組成

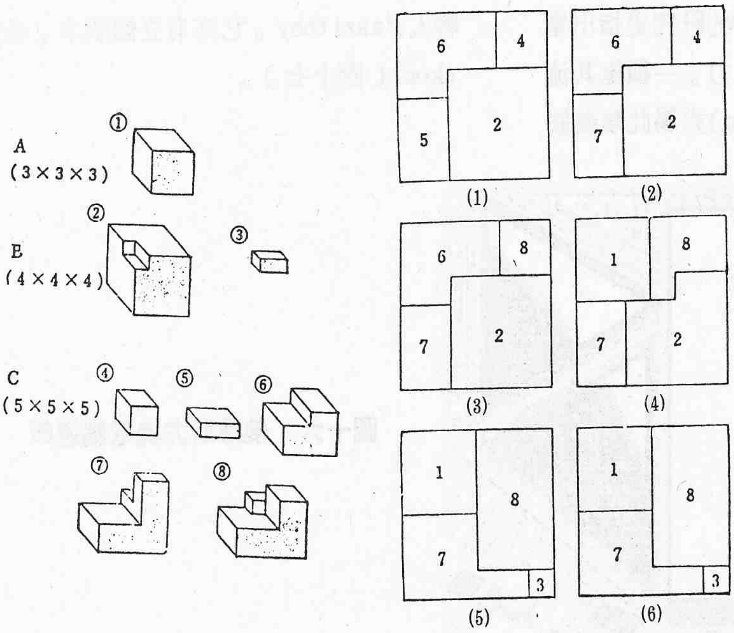


圖十一　拼成各種形狀

其他類似的正立方體割切有史蒂因霍斯立方體（圖十二）及尤雷卡的立方體（圖十三）等。這些立方遊戲均是極易自行製作的。

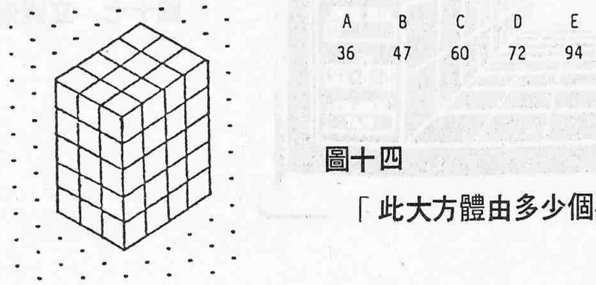


圖十二 史蒂因霍斯立方體



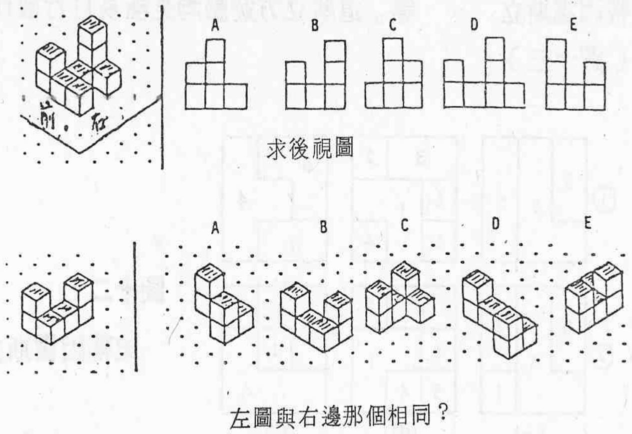
圖十三 尤雷卡立方體

在衆多空間想像能力量表中，美國國家教育進展評核（National Assessment of Educational Progress）、英國中學數理計劃概念（Concepts in Secondary Mathematics and Science Project）及密西根教育評核程式（Michigan Educational Assessment Program）均包含如下問題：給出大立體，問由多少小立方體組成（圖十四）〔8〕？Ben-Haim，Lappan及Houang〔8〕的研究中則以問學生某立體的前視圖、在視圖等（取自中級數學計劃Middle Grades Mathematics Project）（圖十五）作訓練，提高學生的空間能力。以上遊戲亦能發揮此等作用。



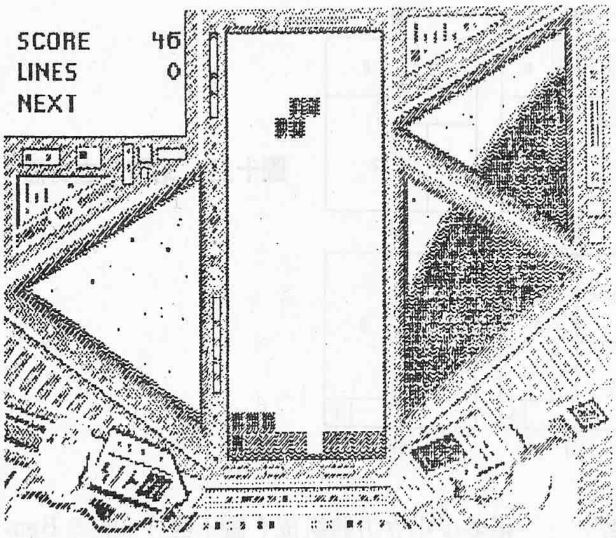
圖十四

「此大方體由多少個小立方體拼成」？

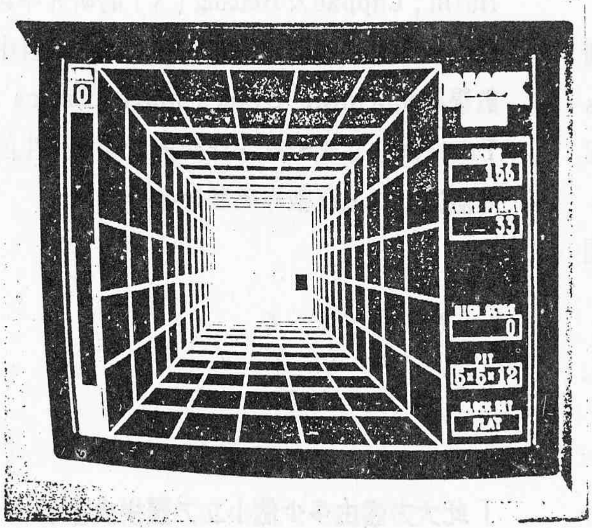


圖十五　中級數學計劃量表

Gagnon〔17〕、Ball及Bogatz〔7〕、Rovert〔23〕、Salomon〔24〕等的研究更指出電視遊戲等能協助增強空間想像力。一種極其流行，名爲俄羅斯方塊（Tetris)亦屬此類裝嵌遊戲（圖十六），此遊戲得名乃因發明者爲蘇聯人Paszitnov。它亦有立體版本，名爲Blockout（圖十七）。



圖十六　俄羅斯方塊電腦遊戲

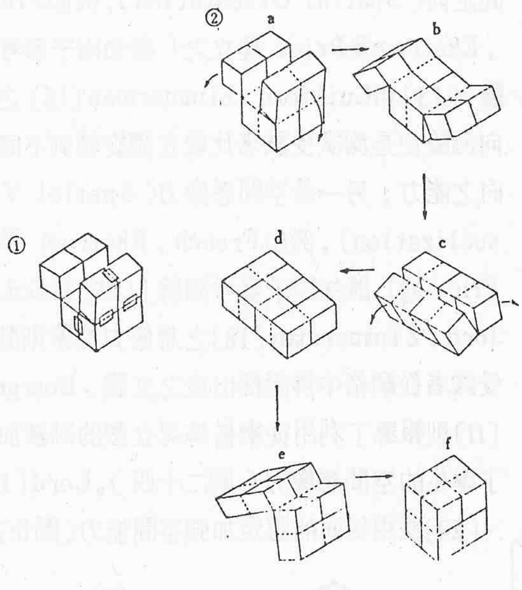


圖十七　立體俄羅斯方塊遊戲

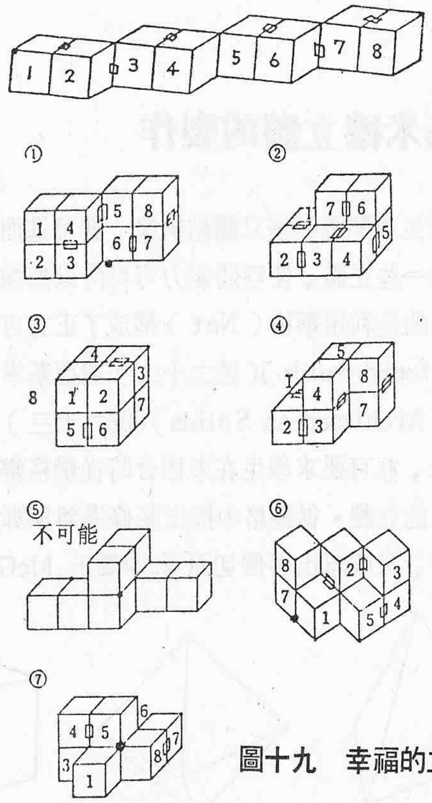
立體的展開

上述部份遊戲均以將正立方體切成八個小正立方體爲基礎。假使我們把其中一些小立方體用鉸鏈（或膠紙帶）適當的黏貼上，便可無限（循環）地展開。圖十八便是其中一法。此外，還有一種名爲「幸福的立方體」的玩具（圖十九），亦是利用八個小正立方體適當的黏貼着，其次又如七巧板般，除了大正立方體外，可摺成其他形狀。這類遊戲不止可增強對立體形狀的熟習，且非常容易自製。

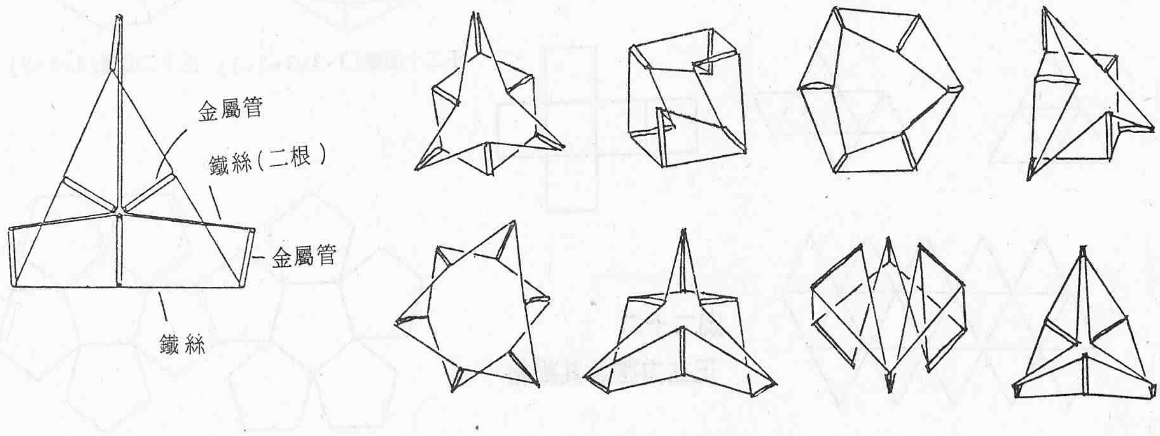
基於此意念，便有「幾何」、「吉本」等玩具。「幾何」（圖二十）是由六根金屬管和12根鐵絲網組成，可隨意施轉形成不同的結構。圖二十中便是八種旋轉態。「吉本」則由十二個相同四面體黏合而成。這十二個四面體的構成是這樣的，先由大正立方體割切成三個相同之大四面體，其底與高與原來正立方體的相同。再將每個四面體切成四個相同的小四面體即成（圖二十一）。



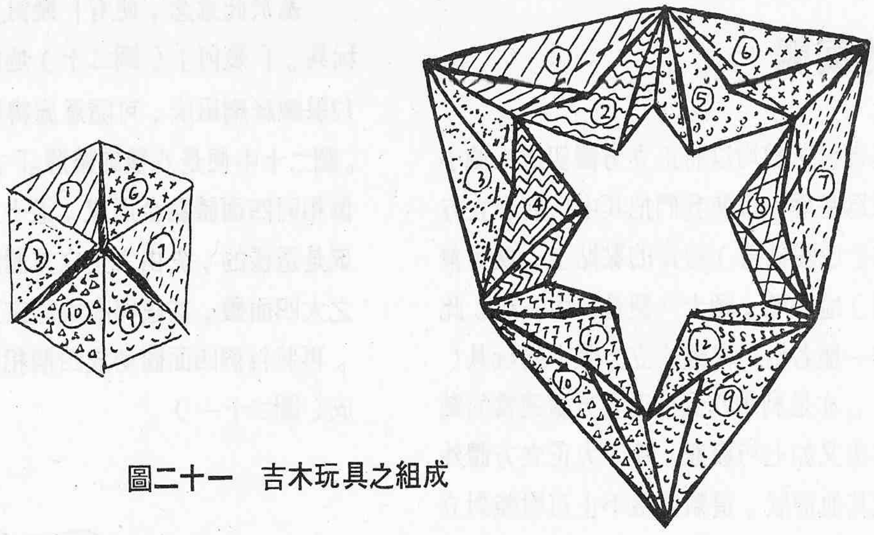
圖十八　立方體的展開



圖十九　幸福的立方體



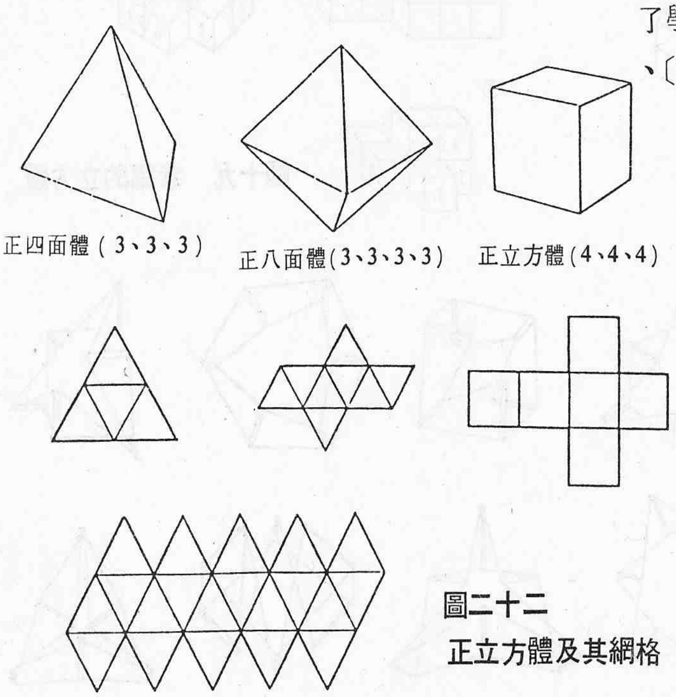
圖二十　「幾何」及其八種旋轉態

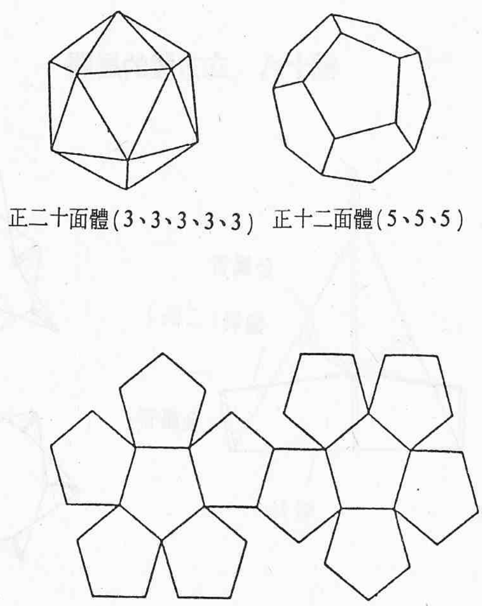


圖二十一　吉木玩具之組成

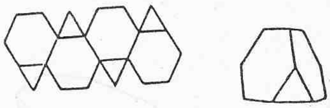
亞基米德立體的製作

學生在熟悉一些立體結構後，就可進而動手製作一些立體，使空間能力可再得以加強。最普遍的是利用網格（Net）摺成了正立方體（Platonic Solds）（圖二十二）或亞基米德立體（Archimedean Solids）（圖二十三）等。除此，亦可要求學生在未摺合時從網格辨認摺出來的立體、從網格中指出某條邊將與那條邊黏合，又或認出各個切面等。事實上，McGee〔21〕指出，空間能力實可分兩個導向。一是空間定向（Spatial Orientation），例如French，Ekstrom及Price 建立之「識知因子參考測驗」〔15〕和Guilford、Zimmerman〔18〕之定向測驗便是測試受試者比較立體旋轉到不同方向之能力；另一是空間想像力（Spatial Visualization），例如French，Ekstrom 及 Price 的「識知因子參考測驗」〔15〕和Guilford，Zimmerman〔18〕之想像力測驗則測試受試者從網格中辨認摺出後之立體。Bourgeols〔11〕則報導了利用從網格辨認立體的訓練加強了學生的空間想像力（圖二十四）。Lord〔19〕、〔20〕使用切面的認定加強空間能力（圖廿五）。

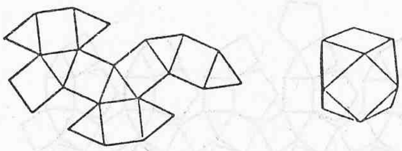




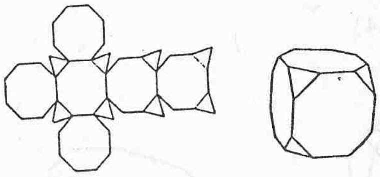
圖二十二
正立方體及其網格



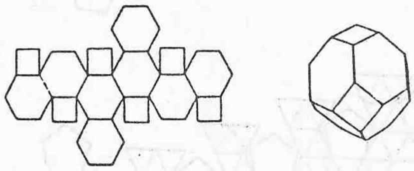
(3、6、6)



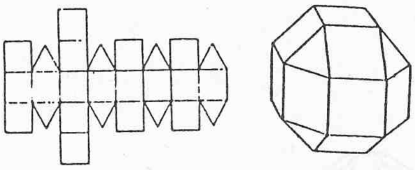
(3、4、3、4)



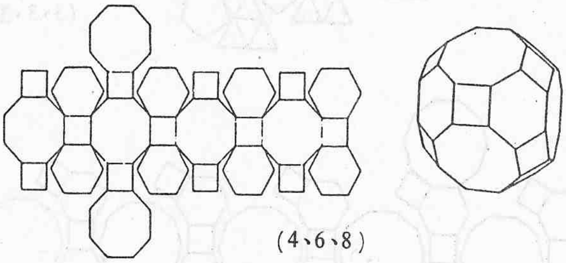
(3、8、8)



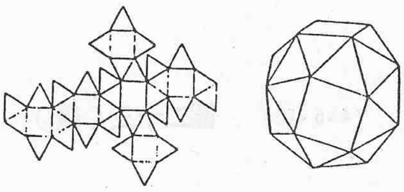
(4、6、6)



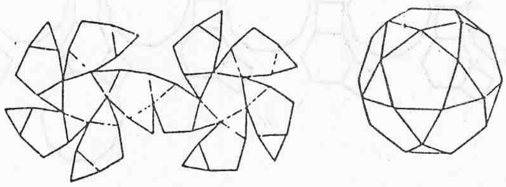
(3、4、4、4)



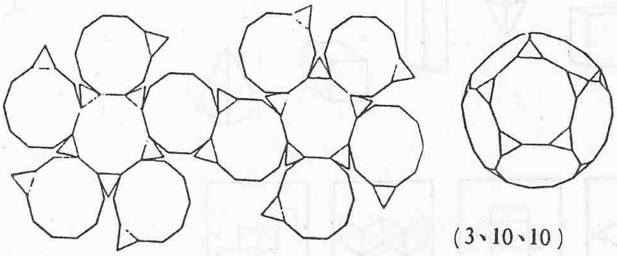
(4、6、8)



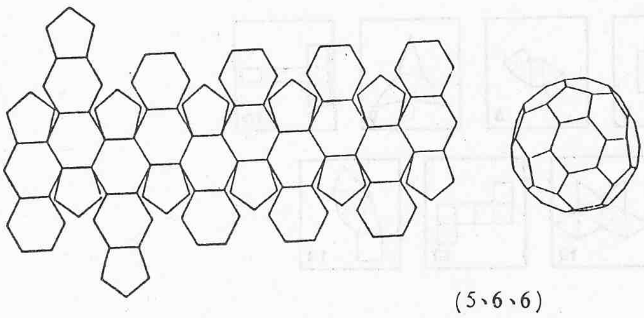
(3、3、3、3、4)



(3、5、3、5)

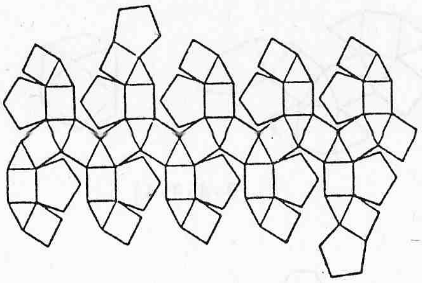


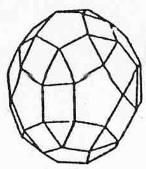
(3、10、10)

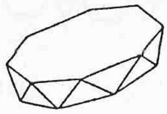


(5、6、6)

圖二十三
十三種亞其米德立體及其網格

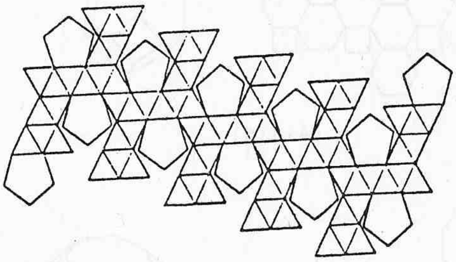


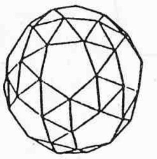


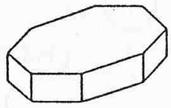


反柱體(3、3、3、8)

(3、4、5、4)

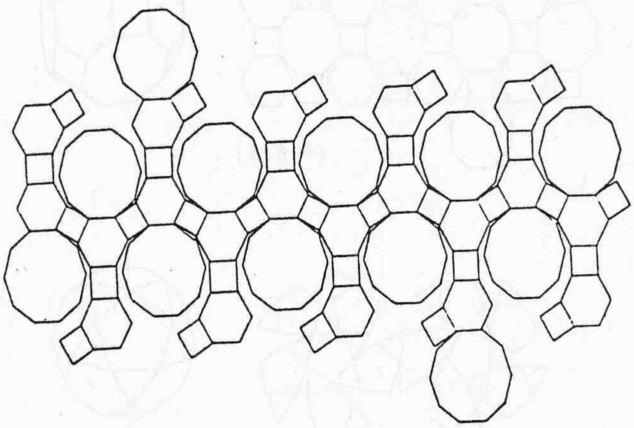


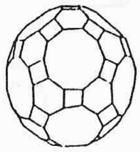




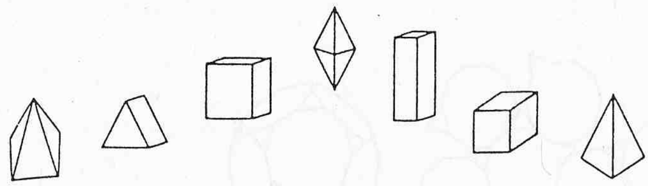
(3、3、3、3、5)

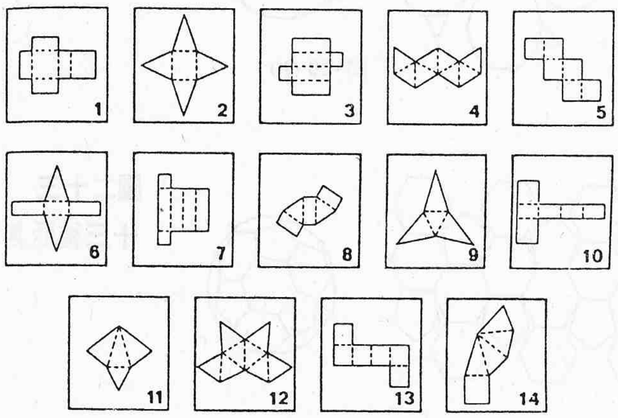
柱體(4、4、8)



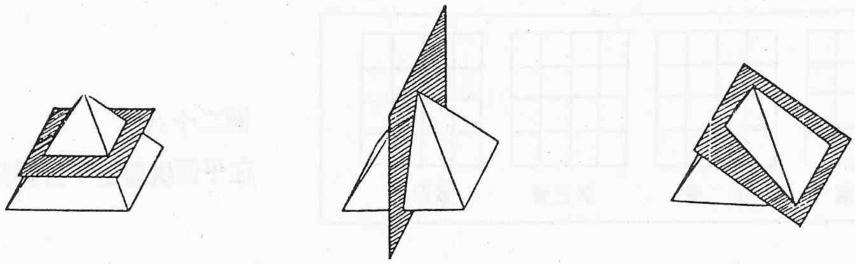


(4、6、10)　**圖二十三(續)**





圖二十四　立體與網格配對測試

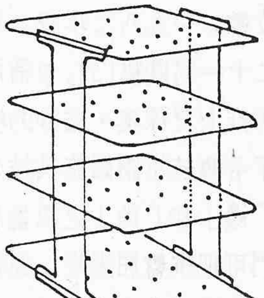


圖二十五　切面測試

此外，正立體和亞基米德立體可以帶出較多的數學內容。例如計算邊長爲1cm各種正立體的體積，發現歐拉公式，從而證明只可有五種正立體及十三類（柱體與反柱體除外）亞基米德立體等〔10〕、〔25〕。

立體井棋

不少學生都曾玩過「井棋」這遊戲，其他如「三、六、九」、「五子棋」、「西瓜棋」等都可算是「井棋」的平面家族，而立體井棋的棋盤其實也甚易自製，只須用四塊透明膠片架疊成四層就可以了（圖二十六）。兩方對奕時交替下黑白兩種棋子，只要能橫、直、豎或斜向串成四子即勝。不少立體的遊戲均只是在某些立體的表面上玩的，但立體井棋由於可穿過不同平面，故可稱是用盡了三個維度的。除此之外，我們還可問一些有趣的問題。如和棋的可能等（答案是肯定的：圖二十七）。



圖二十六　立體井棋

第一層

×○××

○○○×

×○○○

××○○

第二層

○○○×

×○○×

×○××

××○○

第三層

○×○○

×○××

×××○

○×××

第四層

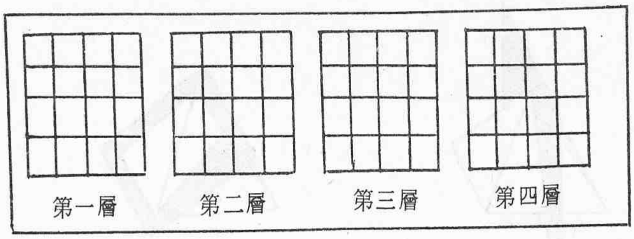
○×○×

×××○

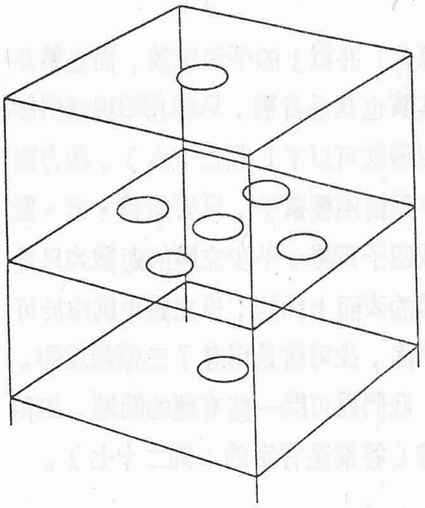
○○×○

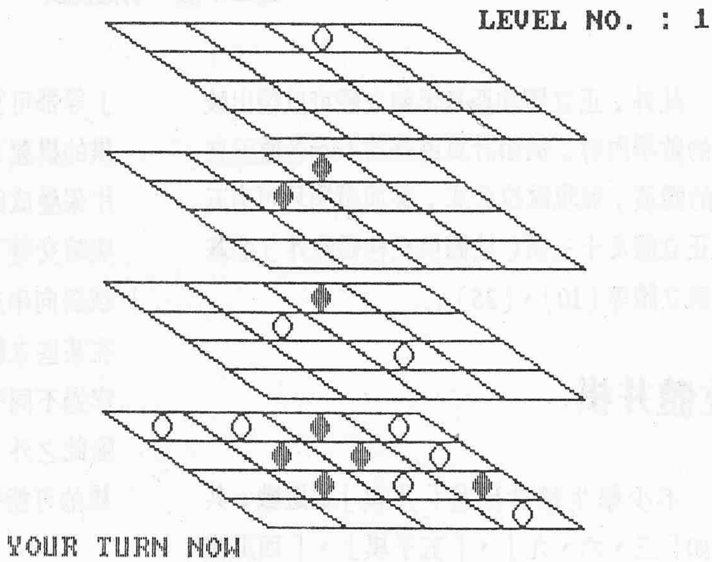
○○×○

圖二十七　上體井棋之和棋



圖二十八
在平面棋盤上下立體井棋





圖二十九　描述空間關係測試

圖三十　立體電腦井棋

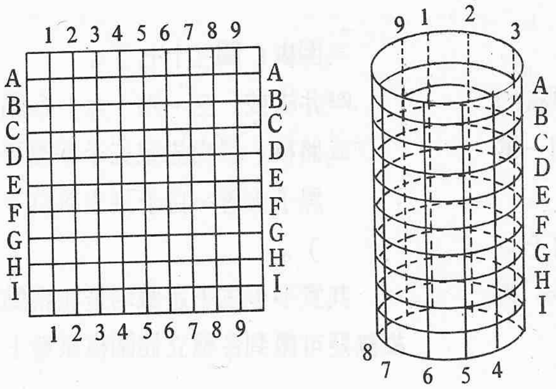
純熟之後，可轉移在紙上玩（圖二十八）、進一步增強空間能力；甚或免去棋盤、交替寫出帶序三元組（a，b，c）（其中 $1\leqslant a,b,c\leqslant 4$）。這種訓練可算是提高了McGee〔21〕所指的空間想像力，Cox與Richardson〔12〕的研究中亦利用了類似立體井棋的棋盤要求受試者描述兩子之關係（前後上下等）（圖二十九）。

電腦遊戲中亦有名爲Catch的立體井棋（圖三十），只是規則稍有不同：若要下子於（a，b，c）處而 $c\neq 1$（即非最低層），則 (a,b,c)，$1\leqslant k\leqslant c$ 必先已下了子。若把四座立體井棋棋盤放在一起，我們還可下四維井棋哩！

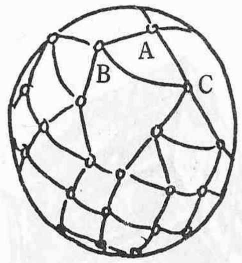
球面圍棋

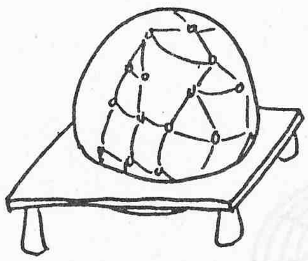
我國「琴棋書畫」中的「棋」便是指圍棋，在其演變過程中曾有十三路、十五路和十七路等，至唐中葉才把十九路棋盤定爲標準。北宋沈括「夢溪筆談」中「棋局都數」中便提到最多可 $3^{19\times 19}$ 的局數，更用指數公式算出這是一個172位數。一九八二年底，日本一家棋店便推出了二十一路圍棋〔5〕，並稱將本來複雜多變的圍棋再推上更深奧、玄妙的境界。二十一路圍棋除了令傳統棋譜難施其技外，更將非四面受敵的「邊」和「角」之數量相應地減低了。假如我們可把棋盤屈過來，連接了對邊，「邊」與「角」就會消失，變成完全只有「腹地」了（圖三十一）。基於這個意念，筆者曾於一九八三年設計了球面圍棋〔6〕。

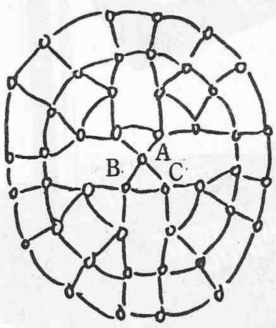
要設計球面圍棋即需要在球面上增出一網絡，每一結點連上同一數量的弧，如圖三十二般，從 A 點開始，伸展出 n 層（圖中 $n=3$）、再加 m 層矩形（圖中 $m=1$），其中 n，m 均爲隨意，則共有



圖三十一　把棋盤屈起來

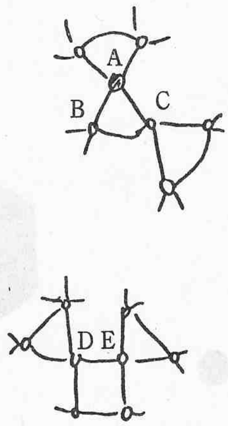






從A頂點望下的北半球情況。

南半球與之完全相同



圖三十二　球面圍棋

$$1+4+8+\cdots+2^{n+1}+m(2^{n+1})$$

$$=2^{n+1}(m+2)-3$$

個結點。

在這設計中雖如一般的圍棋的每點被四點包圍，但其實每點的處境不盡相同，因若要每點處境相同，衆所周知，則只有十三種亞基米德立體；如果我們要求每點連到不少於四個弧、結點數量又不少於二十者，除了反柱體外，就只有圖二十三中的(3,4,3,4),(3,4,5,4),(3,4,4,4),(3,3,3,3,4),(3,3,3,3,5)五種，它們的頂點數量依次是30,60,24,24和60，不能像球面圍棋般的任意多。

立體圍棋

球面圍棋其實只是將棋盤摺合起來的一種方式。筆者於八三年也同時提出圓柱圍棋、圓環圍棋等（圖三十三）；而我們無須將棋盤眞的摺合，只須將兩邊把相應點當作一點就可以了。這是拓撲學上黏合（Identification）的辦法：$I/R\cong C$，$C/S\cong T$，其中 $I=[0,1]$、C 爲圓柱、T 爲圓環；R 爲將左右兩邊黏合、S 爲將上下兩邊黏合之等價關係；$\cong$ 則表同胚。如果我們適當的改變等價關係、更可在梅比烏斯帶（Mobius Band）及克萊茵瓶(Kline

Bottle)上下棋！

事實上，八四年後，市面上有立體圍棋的出售（圖三十四）。說明書中建議可在同一棋盤上下：

㈠西瓜盤（若兩黑子首尾夾着一串白子，則改白子爲黑子，最後看那方子多：圖三十五）。

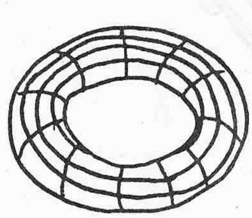
㈡五子棋（圖三十六）。

㈢圍棋（圖三十七）。

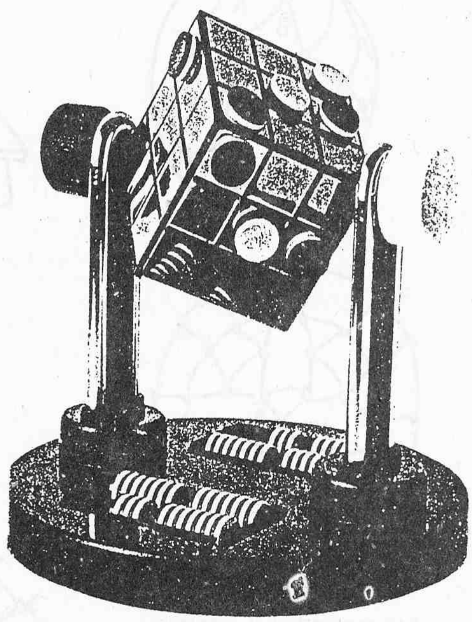
㈣井棋或「三、六、九」（圖三十八）。

㈤將棋（黑白先定五子如圖再行棋，若兩黑子夾着一白子則去該白子：圖三十九）。

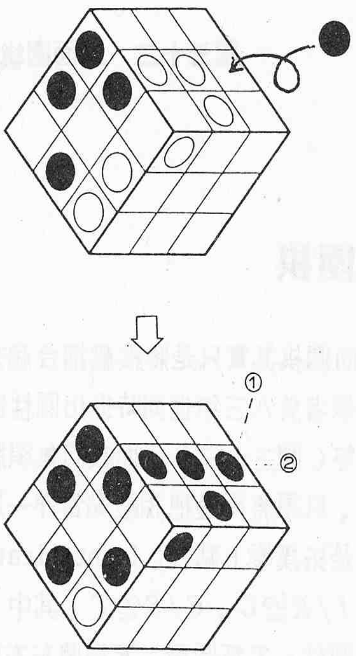
其實不少棋子遊戲均是在格點板上玩的，故無疑可搬到各種立體圍棋棋盤上來。



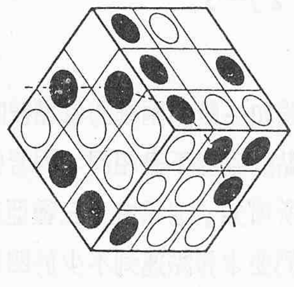
圖三十三　圓環圍棋



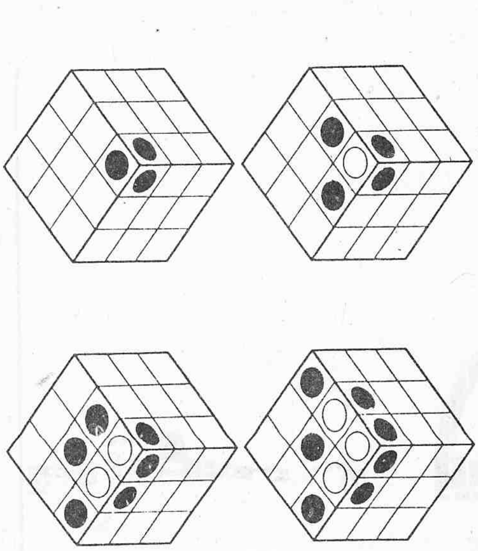
圖三十四　立體圍棋



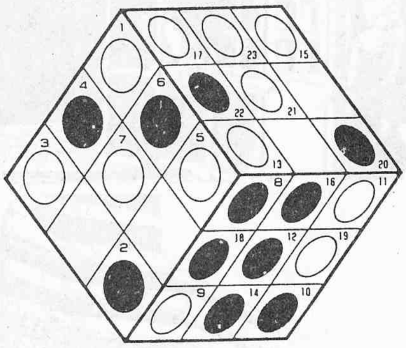
圖三十五　立體西瓜棋



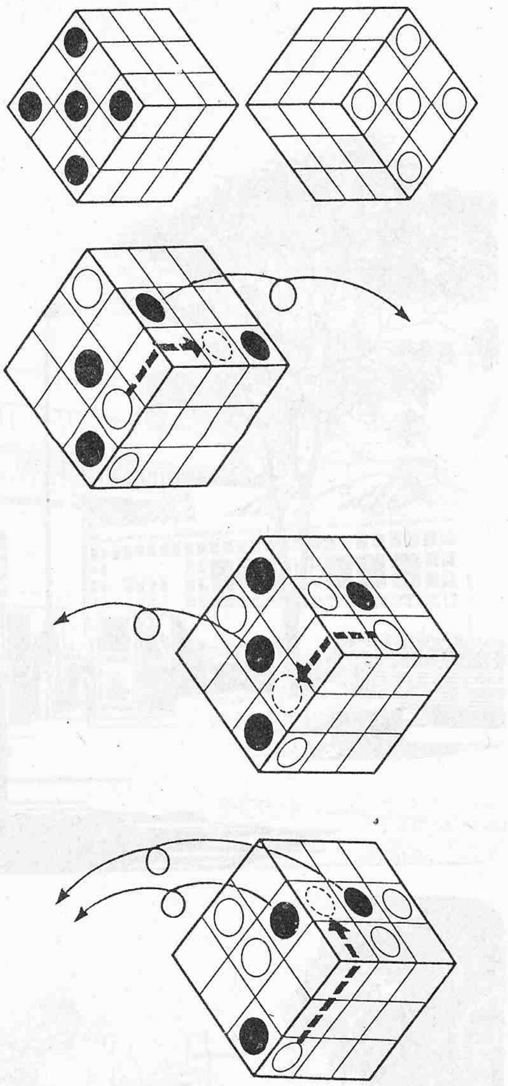
圖三十六　立體五子棋



圖三十七　立體圍棋



圖三十八　立體「三、六、九」



圖三十九　立體將棋

結語：建立空間想像力的階程

在現時中學數學課程裏，空間能力的訓練與其重要性每每不成比例，學生往往在未熟習立體結構的基礎下被迫瞬即進入立體三角、幾何等艱澀的運算裏。按照田尼氏的六階，學童在早歲若可透過「攀架」（圖四十）、「立體迷宮」（圖四十一）等進行自由玩耍，跟着利用上述立體數學遊戲進行有規律遊戲，繼而親手製造多面體等；從空間能力的增強，學生更能從平面圖中理解立體形狀。

Nicholson 及 Seddon〔22〕曾提出兩層的學習層構，低層乃由立體模型中描述空間關係，高層乃由平面圖中描述此等關係，所以在上述立體井棋和立體圍棋等亦由立體棋盤轉移到平面棋盤中，即協助學生從低層轉入高層的能力。

綜上所述，空間想像力的訓練可如Gagné的學習層構說〔16〕般的分成如下六個階段：

一接觸與自由玩耍。

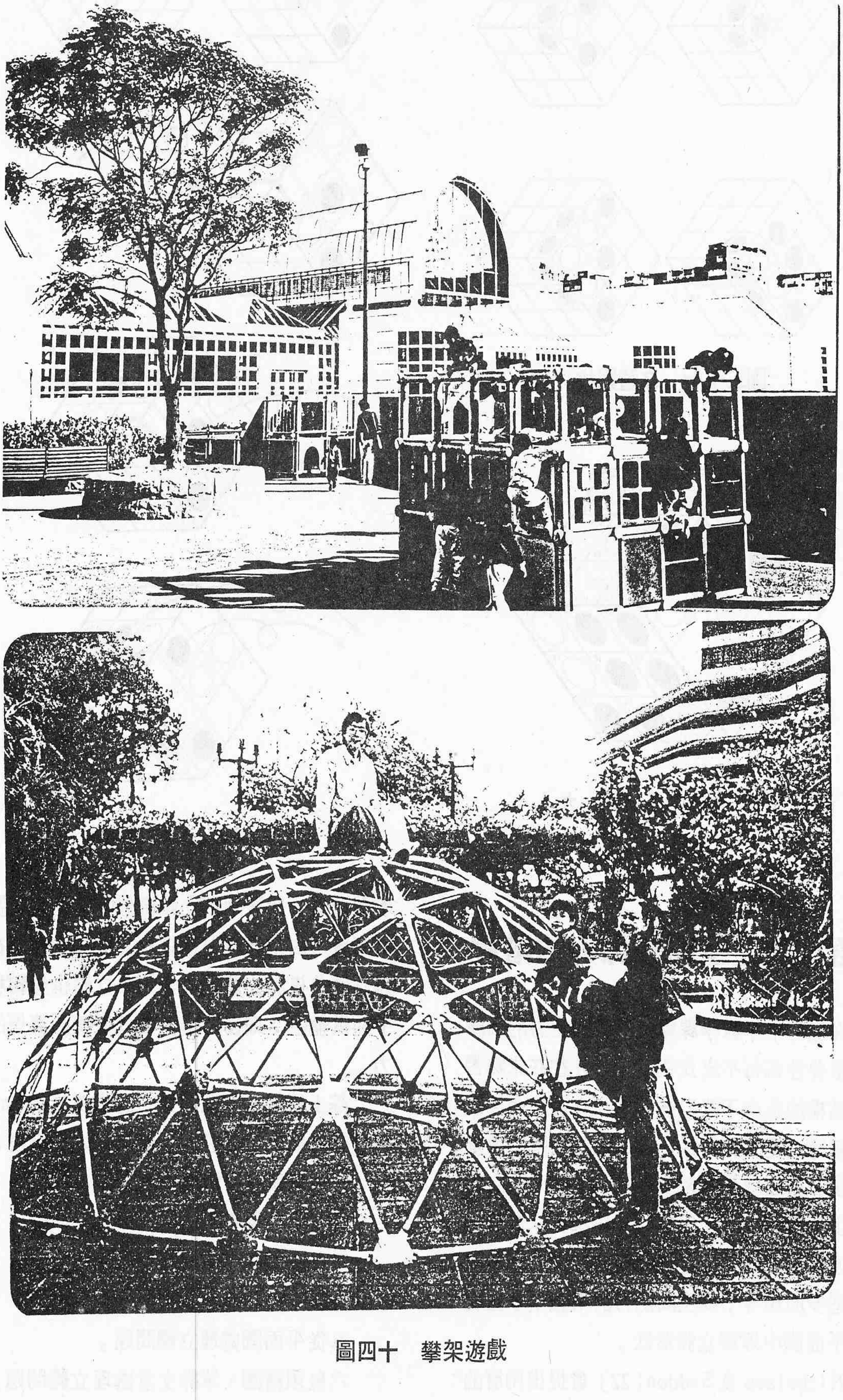
二立體數學遊戲。

三從立體模型中認識空間關係。

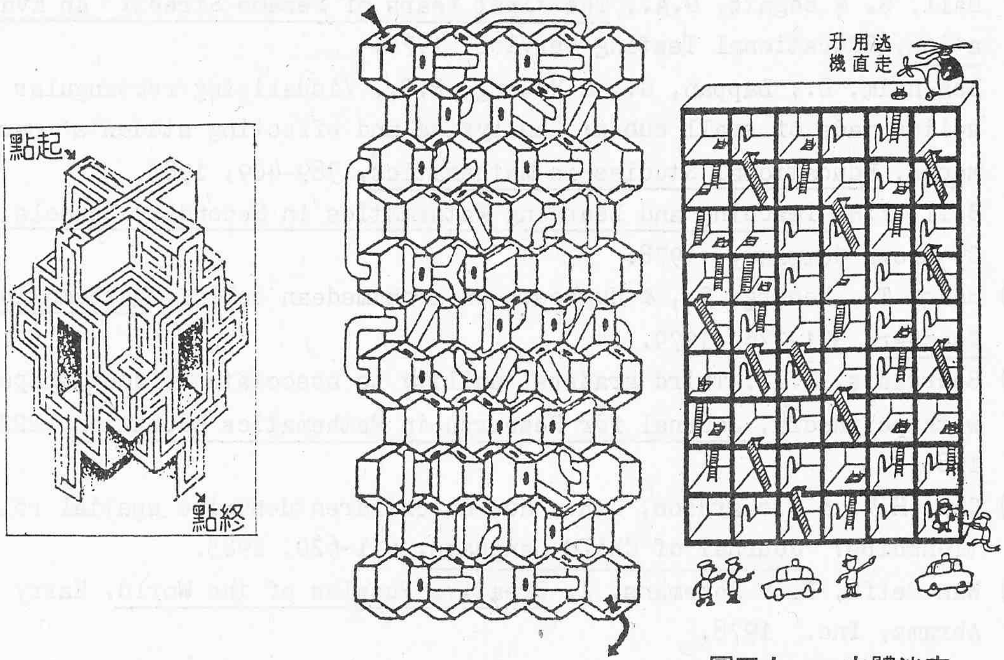
四親手製作立體模型。

五從平面圖處理立體問題。

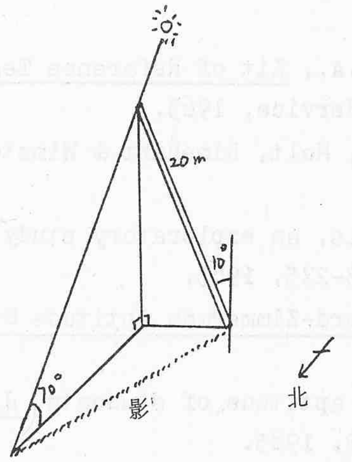
六無須繪圖、單靠文意處理立體問題。



圖四十　攀架遊戲



圖四十一　立體迷宮



圖四十二　按文意製模型：

「一 20 米長木椿向東傾斜 10°，太陽於南方，仰視角爲 70°，求椿影長」

這亦與田尼氏六階大致配合。對於初接觸立體三角或幾何問題時，學生若能有機會按文意製造模型（如圖四十二），則對由上面的第三階升上第四、第五階會有很大的幫助，而這一環節卻是常被忽略的。

參考文獻

〔1〕　十三院校協編組　「中學數學教材教法」，人民教育出版社，1980　。

〔2〕「中學數學教師手册」編寫組　「中學數學教師手册」上海教育出版社，1985　。

〔3〕　高木茂男、丁一譯　「立體數學遊戲」，科學普及出版社，1984　。

〔4〕　郭燓昌　「中學數學教學法」，黎明出版事業公司，1985　。

〔5〕　黑白子　「二十一路圍棋棋盤」，明報 15/1/1983　。

〔6〕　黃毅英　「關於球面圍棋的設計」，數學通報第 8 期，1984　。

(7) Ball, S. & Bogatz, G.A., The First Years of Sesame Street: An Evaluation, Educational Testing Service, 1970.

(8) Ben-haim, D., Lappan, G., & Houang, R.T., Visualizing rectangular solids made of small cubes: analyzing and effecting students' performance, Educational Studies in Mathematics, 389-409, 1985.

(9) Bell, F.H. Teaching and Learning Mathematics in Secondary Schools, Wm. C. Brown Company, 1978.

(10) Boag, T., Boberg, C., & Hughes. On archimedean solids, Mathematics Teacher, 371-376, 1979.

(11) Bourgeois, R.D., Third graders' ability to associate foldout shapes with polyhedra, Journal for Research in Mathematics Education, 222-230, 1986.

(12) Cox, M.V. & Richardson, J.R., How do children describe spatial relationships? Journal of Child Language, 611-620, 1985.

(13) Wan Delft, P. & Botemans, J. Creative Puzzles of the World, Harry N. Abrams, Inc. 1978.

(14) Dienes, A.P., Building Up Mathematics, Hutchinson Educational Ltd., 1981.

(15) French, J.W., Ekstrom, R.B., & Price, L.A., Kit of Reference Tests for Cognitive Factors, Educational Testing Service, 1963.

(16) Gagne, R.M., The Conditions of Learning, Holt, Rinehart & Winston, 1973.

(17) Gagnon, D., Videogames and spatial skills, an exploratory study, Educational Communication and Technology, 263-275, 1985.

(18) Guilford, J.P. & Zimmerman, W.S., Guilford-Zimmerman Aptitude Survey, Sheridan Psychological Services, 1953.

(19) Lord, T.R., Enhancing the visuo-spatial aptitude of students, Journal of Research in Science Teaching, 100-102, 1985.

(20) Lord, T.R., Spatial teaching, The Science Teacher, 32-34, 1987.

(21) McGee, M.G., Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, Psychological Bulletin, 889-918, 1979.

(22) Nicholson, J.R. & Seddon, G.M., The understanding of pictorial spatial relationships by Nigerian secondary school studnets, Journal of Cross-cultural Psychology, 381-400, 1977.

(23) Rovert, J., Mediate and direct experience in the development of children's spatial skills. Paper delievered at a meeting of the Society for Research in Child Development Conference, Denver, CO., 1975.

(24) Salomon, G., Interaction of Media Cognition and Learning, Jossey-Bass, 1979.

(25) Walsh, T.R.S., Characteritizing the vertex neighbourhoods of semi-regular polyhedra, Geometriae Dedicata, 117-123, 1972.

（本文作者為香港中文大學教育學院講師）