數學作坊的經驗

蕭文強

有些人雖然不懂玩足球，觀看足球比賽時勁頭可眞大；有些人雖然不明白樂理，聽賞音樂時可如痴如醉；有些人自己寫不來小說，談論文學時卻頭頭是道；有些人自己拍不來電影評論電影時卻十分到家。可惜數學不是這麼一回事。單作壁上觀，終是隔一層；若非親手幹，難望有所成。要眞正一窺數學殿堂之美，要眞正掌握數學神奇之用，就只有硬闖這條途徑了。

普及數學的活動，最理想是讓參加者有主動參與的經驗，增進數學見識之餘，又能嘗到探討數學的樂趣。講座雖然能增進聽衆的數學見識和引發聽衆的數學興趣，它畢竟是較被動的活動，聽衆不一定有時間去咀嚼講座內容中每一項細節和它的延伸。數學競賽雖然叫參加者動腦筋，但它又是較著重個人表現的活動，很多時還只限於少數能力極高的精英，競爭味道亦頗濃厚。下面要介紹的是另一種型式的活動——數學作坊，它較能照顧更多對數學有興趣的中學生。

從去年春季開始，在香港聯校數學學會的安排底下，我協助該學會辦了四次數學作坊。每次約有十五至二十多人來參加，大家都很投入，當場氣氛熱烈活潑，事後的反應也不錯，令人鼓舞。在附錄裏，我把四份用過的材料擺出來，以供參考，以下讓我就選材和進行程序作一些按語。

選材方面，煞費思量。考慮及參加者來自不同的學校和不同的級別（中三至中六），我們不能對參加者的數學背景知識作過高的要求，只能以初中數學爲底線。固然，我們必須假定參加者有一定的數學熱情和愛思好問的習慣。第一次數學作坊我們選了不可能以圓規直尺作圖爲主題，第二次數學作坊我們選了完全數爲主題，第三次數學作坊我們選了遞歸計算爲主題，第四次數學作坊我們選了數列爲主題。它們需要的準備知識並不多，但由此觸及的數學卻不少，有時更收溫故知新與知新溫故之效。而且，這些題材又都不在正規的中學數學課程範圍內，符合課外活動拓展眼界的用意。選了主題後，便得環繞主題設計一份由淺入深的材料，讓參加者按圖索驥，逐步深入理解面對的問題。（承蒙美國俄亥俄州立大學的姚如雄博士爲第一份和第二份材料傾注了不少心血，謹在此致謝。）

其次，我們希望通過這種型式的活種鼓勵同學多思考、多討論、多發表意見。要貫徹這點，我們讓參加者自行分成若干小組，每組三至五人，因此最理想的參加人數是十五至二十人左右。每組先進行內部討論，誰有主意便拋出來，經其他組員琢磨整理後再拿出來向全體講解，徵求別的小組的意見。如此群策群力去

探討學問，不單是一種樂趣，也是日後做學問工夫的預習。主持數學作坊的教師應儘量以旁觀者的身份觀察，只給予鼓勵和評語，但在適當場合亦應指出某些良好的思維習慣或者解決問題的訣竅。要是碰到出現了“冷場”，或是當大家均感一籌莫展的時候，主持的教師也需要作一些適當的提問，刺激參加者思考。所以最理想是由幾位教師合作，在各組間穿梭往來，觀察各組的進展情況，相機行事。

在幾次數學作坊中，參加者表現甚佳，有好些我們事前估計並不容易做的題目，他們都成功地解決了。但同時我們也看到一般中學生對幾何知識的掌握較薄弱，在表達方面頗見散亂，運用語言的口述或書寫能力均有待改善。不過，只要自己決心改進並假以時日，這幾點都一定能克服過來，重要的是大家有機會聚在一塊舒暢愉快地瞭解一些有趣的數學，親嘗做數學工夫的樂趣。作爲主持人，我也分享了這份樂趣呢！

附　錄

數學作坊 I

P_0是一個平面上的點集。運用以下兩種方法（並且只准許運用這兩種方法），我們構作直線和圓，把這些（不相同的）直線和圓的交點添加於P_0，得到一個擴大的點集P_1：

〔c1〕通過P_0的兩點構作一直線。

〔c2〕以P_0的一點爲中心，以P_0的兩點之間的距離爲半徑，構作一圓。

從點集P_1出發，依樣畫葫蘆得到更擴大的點集P_2，餘類推。若平面上的一點是在某個P_n內，我們便說該點可由P_0構作出來。

(1)設P_0只有兩點，記作A和B。

(a)能否擴大P_0，使擴大了的點集包含一點C，其中CA與AB垂直？

(b)選定單位長，使A的座標是$(0,0)$，B的座標是$(1,0)$。是否全部座標是整數的點均可由P_0構作出來？

(c)是否全部座標是有理數的點均可由P_0構作出來？

(2)若P_0只有不共線的三點，記作A、B、C，能否由P_0構作一點D，使DA平分$\angle BAC$？

讓我們轉用代數語言，我們說實數α是可構作，意思就是指座標是$(\alpha,0)$的點可由座標是整數的點集構作出來。以下我們要討論可構作的數組成怎樣的集。

(3)(a)若α和β可構作，試證明它們的和、差、積、商（有定義時）均可構作。

(b)若α（>0）可構作，試證明$\sqrt{\alpha}$亦可構作。

(c)試舉一些例子，是可構作的無理數。

(d)你猜一個典型的可構作的數，是什麼樣子？

F是一個實數集，具備以下的性質：若α和β在F內，則它們的和、差、積、商（有定義時）均在F內。所謂F點，是指座標均在F內的點；所謂F線，是指通過兩個F點的直線；所謂F圓，是指中心及圓周上某點都是F點的圓。

(4)(a)試證明兩不相同的F線若相交，交點是F點。

(b)試證明一F線與一F圓若相交，交點或是F點，或其座標形如$a+b\sqrt{c}$，其中a、b、c在F但$\sqrt{c}$不在F。

(c)討論兩不相同的F圓的交點。

(d)形如$a+b\sqrt{c}$的數集，於和、差、積、商而言，是否具備類似F的性質？這兒的a、b、c在F但$\sqrt{c}$不在F，且c是固定的。

把全部有理數組成的數集記作F_0。F_1是全部形如$a_0+b_0\sqrt{c_0}$的數組成的數集，其中a_0、b_0、c_0在F_0但$\sqrt{c_0}$不在F_0，且c_0是固定的；F_2是全部形如$a_1+b_1\sqrt{c_1}$的數集，其中a_1、b_1、c_1在F_1但$\sqrt{c_1}$不在F_1，且c_1是固定的；餘類推。

(5)試證明若α是可構作的數，則α在某個F_n內。（它的逆命題是否成立呢？）

(6)(a)三次方程 $r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0=0$ 的係數均為有理數，若方程的一個根是可構作的數，試證明方程必有一有理數根。（提示：若 $a+b\sqrt{c}$ 是一根，看看 $a-b\sqrt{c}$。）

(b)若 $r_3=1$，且 r_2、r_1、r_0 均為整數，上述的三次方程有沒有非整數的有理數根？

(7)讓我們看看 $60°$ 角能否用圓規直尺三等分。

(a)如何把問題表述成 $\cos 20°$ 是否可構作的數？

(b)試證明 $\cos 20°$ 是三次方程 $8x^3-6x-1=0$ 的根。

(c)試證明不能用圓規直尺三等分 $60°$ 角。

(8)討論能否用圓規直尺倍立方。

(9)討論能否用圓規直尺構作正五邊形。

(10)對那些整數 n，$n°$ 角能用圓規直尺構作？

數學作坊 II

歐幾里得的數學名著「原本十三卷」成書於公元前三百年左右。由於卷一、卷三、卷四、卷六包括了通常中學幾何的課程範圍，很多人以爲「原本」只是一本幾何著述。其實，卷七、卷八、卷九是關於數論的，它的內容可追溯至公元前六世紀畢達哥拉斯學派的工作。以下是卷八開首的一些定義：

定義一： 單元是表示一的東西。

定義二： 數是由單元合成。

定義三： 某小數是另一大數的部份，意指小數丈量大數。

定義十一： 質數是只能以單位丈量的數。

定義廿二： 完全數是自身等於自身部份合成的數。

(1)試用今天通用的數學語言解釋以上的定義，最好輔以例子說明。

定理三十六（卷九）：若從單元開始，每次雙倍，累加至和是個質數，並將和乘上最後得到的數，其積必是完全數。

(2)試用今天通用的數學語言重寫以上定理的內容，並且以一些實例對它進行驗算。

(3)試證明以上定理。

由以上定理計算得來的完全數均爲偶數。二千年後瑞士數學大師歐拉（1707－1783）證明了任何偶完全數均可由此定理計算得來。（以下敍述，數通指正整數。）

(4) n 是個偶數。

(a)為什麼一定可以表 $n=2^{k-1}q$，其中 $k\geqslant 2$ 而 q 是奇數？

(b)若 s 是 q 的全部因子（包括自身）的和，試證明 n 的全部因子（包括自身）的和是 $(2^k-1)s$。

(c)若 n 是完全數，試證明 $q=2^k-1$，且 q 是質數。

(5)開首五個偶完全數是 6、28、496、8128、33550336。

你留意到結尾的數字有何特別嗎？能否解釋這現象？尋找偶完全數等於尋找形如 $M_k=2^k-1$ 的質數，這種質數叫做梅森質數，因法國僧人梅森（1588－1648）在 1644 討論它而得名。

(6)(a)試證明若 M_k 是質數，則 k 是質數。並對 k 是 1 至 10 的具體例子進行驗算。

(b) $M_{11}=2047$，由此可得什麼結論？

由於 M_k 增大迅速，驗算 M_k 是否質數是個難題。以下介紹法國數學大師費馬（1601－1665）的一個定理，有助驗算 k 較小的情況。

(7) p 是個質數，a 是個不被 p 整除的數

(a)考慮 a、$2a$、…、$(p-1)a$ 這 $p-1$ 個數，試證明用 p 除後，餘數分別是 1、2、…、$p-1$（次序不計）。

(b)利用上面結果，試證明 p 整除 $(a^{p-1}-1)(p-1)!$。

(c)試證明"費馬小定理"：p 整除 $a^{p-1}-1$。

(8)(a)利用"費馬小定理"，試證明若 k 是質數，則 M_k 的質因子必形如 $2kr+1$，r 是某數。（提示：你需要知道，2^s-1 和 2^t+1 的最大公約數是 2^l-1，其中 l 是 s 和 t 的

最大公約數。）

(b)利用上面的結果，試證明$M_{13}=8191$是質數。（只用驗算兩次。）

(c)利用上面的結果，試分解$M_{23}=8388607$為質因子。

對大的k驗算M_k是否質數，通常採用的辦法叫做盧卡斯－雷麥檢驗，是盧卡斯在1877提出，後來由雷麥在1931加以改進的。由$v_2=4$開始，作以下數列v_3、v_4、…、v_k，v_{i+1}是用M_k除v_i^2-2得到的餘數。若k是質數，則M_k是質數的充要條件是$v_k=0$。

(9)試以盧卡斯－雷麥檢驗再次確定$M_5=31$和$M_7=127$是質數，但$M_{11}=2047$不是質數。

雖然理論上盧卡斯－雷麥檢驗能確定M_k是否質數，實際做起來計算的繁複程度還是極高的。至目前爲止（就我們所知），只知道三十個梅森質數，最大的一個是M_{216091}，由史羅溫斯基在1985年九月發現。（試估計這個已知的最大質數有多少個位。）因此，已知的偶完全數也就只有三十個。是否有無窮多個偶完全數呢？那等於問：是否有無窮多個梅森質數？這是數論裏未解決的難題。不妨再看看兩個類似的問題。

(10)(a)「原本」卷九的定理二十告訴我們有無窮多個質數，你曉得歐幾里得對這一回事的經典證明嗎？

(b)費馬在1640討論形如2^k+1的質數。試證明若2^k+1是質數，則k是2的乘冪。形如$F_m=2^{2^m}+1$的質數叫做費馬質數，至目前為止我們只知道有五個費馬質數，分別相應於m是0、1、2、3、4，亦即3、5、17、257、65537。我們不知道這五個是否唯一的費馬質數，那又是數論裏未解決的難題。

你會問：有沒有奇完全數呢？自從古代希臘數學家引進完全數這個數學對象，過了二千多年後，我們仍然不知道答案是有抑或沒有！

數學作坊III

關於猶太歷史學家約瑟弗斯（37－100?）有個這樣的悲壯傳說：在羅馬人侵佔猶太地區期間，約瑟弗斯和三十九位同志在山洞裏負隅頑抗，力戰不支。他們寧死不屈，於是四十人決定圍成一圈，依次數去，每逢數至第七位便由他旁邊的戰友了結其生命，直至剩下最後一位自盡而亡。不過，眞正歷史並不是這樣，否則約瑟弗斯便不能爲後世留下鉅著「猶太古代史」和「猶太戰爭史」。又或許他是最後剩下那位，最後改變了自盡的主意！無論如何，這段故事帶來了一個從古代起即流傳的數學問題，被稱作“約瑟弗斯問題”。

(1)有N個人，標號是1、2、……、N，圍成一圈。順時鐘方向依次數去（由1開始），每逢數至第二位便除掉。例如當$N=5$時，首先除掉2，然後依次除掉4、1、5，最後剩下3。試從實驗中（$N=1$、2、3、…）觀察最後剩下的數目遵循什麼規律？

(2)試尋找一種計算題(1)情況中最後剩下的數目的方法，譬如說，當$N=2000$時，誰是最後剩下的一個？

(3)試解釋為何你的方法計算得到正確的答案。

(4)在類似題(1)的情況中，換了是每逢數至第三位便除掉。例如當$N=5$時，首先除掉3，然後依次是1、5、2，最後剩下4。試從實驗中觀察最後剩下的數目遵循什麼規律？

是否好像毫無規律可言呢？讓我們換一個角度去觀察，試看看你是否理解下面的數字排列如何說明$N=11$的情況：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13		14	15		16	17		18	19
	20		21			22	23			24
	25					26	27			
	28					29				
	30					31				
						32				
						33				

(5)圖中每列最底的數字有什麼性質？它們説明了什麼？

(6)圖中的每列數字，是否按照某種規律遞增呢？試自行多做一些實驗來揣摩印證你的猜測。

(7)把圖中數字1、2、3、……、32、33分別換作33、32、31、……、2、1，再重複題(5)的探討。規律是否變得較明顯呢？

(8)試尋找一種計算題(4)情況中最後剩下的數目的方法，並解釋為何你的方法計算得到正確的答案。

(9)把以上的方法推廣到每逢數至第q位便除掉的情況；並察看當$q=2$（或3）時，方法是否回復到題(2)（或題(8)）的方法呢？

(10)傳説中的約瑟弗斯應該站在那個位置才是最後剩下的一個呢？

數學作坊Ⅳ

在1907有位數學家偉荷夫設計了以下的一種遊戲，二人對壘，輪流自兩堆數目不一的火柴枝取去若干枝，規則是：(i)在任一堆中取去任意數目的火柴枝，或(ii) 同時在兩堆中各取去同樣數目的火柴枝；誰取去最後一枝即是勝方。我們將要探討怎樣才能得勝，首先讓我們討論一些看似毫不相干的問題。

(1)設p_1、p_2、p_3、…是依次由小至大的質數列，$\pi(N)$表示不大於N的質數數目，試填下面的表：

N	p_n	$\pi(N)$	$N+\pi(N)$	p_n+N-1

最右面兩列有什麼有趣的性質呢？

(2)設$a=\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{2}$。$\lfloor x\rfloor$表示不大於x的最大整數，試填下面的表：

N	Na	Nb	$\lfloor Na\rfloor$	$\lfloor Nb\rfloor$

最右面兩列有什麼有趣的性質呢？

(3)設$\alpha=\sqrt{2}+1$。$\lceil x\rceil$表示不小於x的最小整數。考慮數列$\{\lceil N\alpha\rceil\}$，亦即$\lceil\alpha\rceil<\lceil 2\alpha\rceil<\lceil 3\alpha\rceil<\cdots\cdots$，$\tau(N)$表示在數列中不大於$N$的項數目，試填下面的表：

N	$\lceil N\alpha\rceil$	$\tau(N)$	$N+\tau(N)$	$\lceil N\alpha\rceil+N-1$

最右面兩列有什麼有趣的性質呢？

(4)試猜測有怎樣的定理，同時解釋題(1)和題(2)的現象。

讓我寫下一條定理，稱它作定理甲：若$\{q_m\}$是嚴格單調遞增正整數列，即是$1\leq q_1<q_2<q_3<\cdots$，$\tau(N)$是數列中不大於N的項數目，則$\{N+\tau(N)\}$和$\{q_N+N-1\}$這兩個數列的項互不相同，合起來又正好是全部正整數。（為省說話，我們說該兩數列把正整數集劃分。）

(5)試把定理甲用於適當的場合，從而得到以下的定理：若$a=1+1/\alpha$，$b=1+\alpha$，其中α是一個大於1的實數，則$\{\lfloor N\alpha\rfloor\}$和$\{\lceil Nb\rceil-1\}$這兩個數列把正整數集劃分。再者，若$\alpha$是無理數，則$\{\lceil Nb\rceil-1\}$即是$\{\lfloor Nb\rfloor\}$。

(6)把題(5)的定理換一個表述方式：若a是一個實數，且$1<a<2$，而b滿足$1/a+1/b=1$，則$\{\lfloor Na\rfloor\}$和$\{\lceil Nb\rceil-1\}$這兩個數列把正整數集劃分。再者，若a是無理數，則$\{\lceil Nb\rceil-1\}$即是$\{\lfloor Nb\rfloor\}$。對$a=2$而言，命題的內容說什麼？看來“$a<2$”這個條件是過份苛刻了！（但“$1<a$”這個條件卻是必須的，為什麼？）如何改進定理甲才能使以上的定理除掉“$a<2$”這項不必要的限制呢？（改進了的定理，可稱作定理乙。）

(7)試證明定理甲和定理乙。

(8)定理乙的逆命題說什麼？它是否成立呢？

(9)試寫下一條計算第N個非平方正整數的公式。

(10)讓我們回到開首的遊戲，以$\{u, v\}$表示每走一步後的情況，其中u和v分別是兩堆火

柴枝的數目。試證明穩操勝券的情況是{0, 0}或{u_N, v_N}，這兒的u_N和v_N是定理甲中相應於$a=(\sqrt{5}+1)/2=1.618\cdots\cdots$的數列的第$N$項。（這樣的$a$叫做黃金分割比，是一個很奇妙的常數！）

參考文獻

設計Ⅲ時參考了

- W. W. R. BALL, H. S. M. COXETER, "MATHEMATICAL RECREATIONS AND ESSAYS", 13TH EDITION, 1987 (ORIGINAL EDITION BY BALL, 1892).
- I. N. HERSTEIN, I. KAPLANSKY, "MATTERS MATHEMATICAL", 1974.
- R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, O. PATASHNIK, "CONCRETE MATHEMATICS", 1989.

設計Ⅳ時參考了

- S. W. GOLOMB, THE "SALES TAX" THEOREM, MATHEMATICS MAGAZINE, 49 (1976), pp. 187－189。
- R. HONSBERGER, "INGENUITY IN MATHEMATICS", pp. 101－105, 1970.

設計Ⅱ時參考了

- T. L. HEATH, "THE THIRTEEN BOOKS OF THE ELEMENTS OF EUCLID", 2ND EDITION, 1956.
- I. PETERSON, "THE MATHEMATICAL TOURIST", 1988.
- D. SHANKS, "SOLVED AND UNSOLVED PROBLEMS IN NUMBER THEORY", 2ND EDITION, 1978.

——本文作者任教於香港大學數學系——