數學軟體專題

利用個人電腦以驗證假設的二個例子

黃 華 民

近幾年來個人電腦（PC）和相關的軟體快速的進步，爲數學工作者提供了一個很好的計算環境，許多繁複的計算都可以用合適的軟體，以很簡單少數的命令，在很短的時間內找到答案。

MATLAB 是一個很好的數學軟體，在本文中，我們要介紹二個矩陣特徵值問題，及我們如何利用這個軟體猜到答案的過程。

特徵值問題是一個重要的數學問題。每個人都知道怎麼解，只要把示性方程式算出來，再求它的根就成了。但問題是一元n 次多項式的根不是那麼好計算的。如果n 比4 還大就根本沒有辦法。

然而對一些形狀整齊的矩陣而言，它的特徵值往往也是很整齊的。有些問題特徵值的解很有趣，直接去解非常困難，但是如果能猜到它的根，再去驗算是否正確倒是非常容易。下面就是二個特徵值問題的例子。我們用個人電腦輔助，很成功的把特徵值猜出來了。

令

$$A_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

爲一(0-1) 矩陣，其超對角線 (Super-diagonal) 及次對角線(Sub diagonal) 之值俱爲1，右上角及左下角二元素亦爲1，其餘均爲零，這個矩陣的特徵值很容易計算。

解法如下：

令

$$C_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

爲超對角線及左下角均爲1，其它均爲零之矩陣，因爲C_n 的特徵示性方程式爲$x^n-1=0$，故其特徵值很容易解出來。因爲$A_n=C_n+C_n^{-1}$ 所以我們立刻就可以合併C_n 及C_n^{-1} 的特徵值而得知A_n 的特徵值爲。

$$2\cos\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1。$$

現在我們考慮下面這種形式的矩陣

$$B_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B_n 是除了超對角線，次對角線皆爲1，以外元素皆爲零之n 乘n 階矩陣，我們注意到除了右上角和左下角二個元素外，A_n 和B_n 矩陣完全相同，可是如何去求B_n 的特徵值呢？它的特徵值和A_n 是否有關係？

我們觀察到如果除掉$n+1$ 乘$n+1$ 階矩陣A_{n+1} 的第一列及第一行，就是矩陣B_n 。根據**Rayleigh** 原理，如果A_{n+1} 及B_n 的特徵值分別爲$a_0\le a_1\le\cdots\le a_n$ 和$b_0\le b_1\le\cdots\le b_{n-1}$ 。則這二組特徵值會交織成下列形狀

$$a_0\le b_0\le a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le\cdots\le b_{n-1}\le a_n。$$

因爲$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ 所以A_{n+1} 的特徵值$\{2\cos\frac{2k\pi}{n+1},k=0,1,2,\cdots,n\}$ 中大部分根

$$2\cos\frac{2k\pi}{n+1}=2\cos\frac{2(n-k)\pi}{n+1}$$

$$k=1,\cdots,n。$$

均爲二重根。因此由**Rayleigh** 原理，不費吹灰之力，就知道$\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\}\quad k=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$都是$B_n$ 的特徵值。

這解決了一半的問題，但是另外一半特徵值呢？由方才的討論知道另外一半的特徵值一定參雜在$\{2\cos\frac{2k\pi}{n}\quad k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\}$ 間。如果我們相信特徵值是很整齊的話，不妨假設B_n 的特徵值是$\{2\cos\frac{k\pi}{n+1},\quad k=1,2,\cdots,n\}$ 。

我們用個人電腦來驗證這個假設是否合理。利用**MATLAB** ，我們可以很容易驗證上面的假設。底下我們要說明驗證的過程。

首先利用

$$B5 \;=\; \mathrm{diag}(\mathrm{ones}(1,4),1)$$
$$+\mathrm{diag}(\mathrm{ones}(1,4),-1)$$

這個指令，就可使$B5$ 變成上述的$B5$ 矩陣。再鍵入指令

$$E5=\mathrm{sort}(\mathrm{eig}(B5))'$$

不到半秒鐘，$B5$ 矩陣的特徵值就由小而大列印在螢光幕上

-1.7321 -1.0000 -0.0000 1.0000 1.7321

再用下列指令，就可以驗證我們方才的假設

$$K5=2*\cos((\frac{1:5}{6})*\mathrm{pi})$$

上述的指令一下，螢幕上立即出現$2\cos\frac{k\pi}{6},\ k=1,2,\cdots,5$ 之值

1.7321 1.0000 0.0000 -1.0000 -1.7321

這表示$n=5$ 時，假設沒有錯。爲了增強信心，我們在機器上發出下面一串的指令

```
for i = 3 : 20
D = diag (ones(1, i-1), 1)
    +diag (ones(1, i-1), -1));
e = sort (eig(B))';
k = sort (2 * cos((1 : i)/(i+1) * pi));
round (k - e)
end
```

(round 這個指令的用處是把誤差項去掉。)

我們立刻在螢光幕上發現。

```
ans  0 0 0
ans  0 0 0 0
ans  0 0 0 0 0
     ⋮
ans  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

這表示至少在$n \leq 20$ 以前我們的假設都是正確的。

證明倒也不太困難。因爲A_{n+1} 的特徵向量是

$$\left(\sin\tfrac{0\cdot 2k\pi}{n+1}, \sin\tfrac{1\cdot 2k\pi}{n+1}, \sin\tfrac{2\cdot 2k\pi}{n+1}, \cdots, \sin\tfrac{n\cdot 2k\pi}{n+1}\right)。$$

所以我們猜B_n 的特徵向量應是

$$\left(\sin\tfrac{k\pi}{n+1}, \sin\tfrac{2k\pi}{n+1}, \cdots, \sin\tfrac{n\cdot k\pi}{n+1}\right)。$$

代入驗算一下，果然不假（很好的三角習題）。

B_n 的特徵值問題解決了以後，我們當然亦可推得矩陣

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的特徵值應是$2(1-\cos\frac{k\pi}{n+1})$, $k = 1, 2, \cdots, n$。

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

是有名的二次差分矩陣。這個矩陣和$\tilde{B}_n$ 矩陣除了左上角及右下角二個元素以外，完全相同。我們可否找出它的特徵值呢？

首先我們注意到$\tilde{B}_n$ 是一個正定的矩陣（即所有的特徵值都是正的）。雖然我們亦可推知對任何行向量x，我們都有 $X^t \cdot D_n \cdot X \geq 0$ 的結果，但$(1, 1, \cdots, 1)^t$ 卻是D_n 的一個特徵值爲零的特徵向量，所以D_n 是半正定的。從這個觀察，再加上前一個例子的猜測我們推測D_n 的特徵值大概是$2(1-\cos\frac{k\pi}{n})$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 。我們利用**MATLAB** 用上述驗證的模式再驗算一次。不到二分鐘，我們就發現這個假設在 $n \leq 20$ 也是對的。要證明這個假設眞正成立，我們必須眞正把特徵向量也找出來。同樣的，因爲猜想特徵向量大概是由$\tilde{B}_n$ 的特徵向量略爲變形而成，所以我們考慮下列向量

$$\left(\sin\tfrac{0\cdot j\pi}{n} + \sin\tfrac{1\cdot j\pi}{n}, \sin\tfrac{1\cdot j\pi}{n} + \sin\tfrac{2\cdot j\pi}{n}, \cdots, \sin\tfrac{(n-1)\cdot j\pi}{n} + \sin\tfrac{n\cdot j\pi}{n}\right)^t$$

與矩陣D_n 相乘，我們立刻發現這果然是特徵值爲$2(1-\cos\frac{j\pi}{n})$ 的特徵向量（又是一個有趣的三角習題）。

—本文作者任教於中央大學數學系—