數學軟體專題

迷你的殘形程式

全 任 重

設(X,d) 爲完備距離空間。從X 中的任意點x 到（非空）緊緻子集C 的距離可以定義爲

$$d(x,C)=Min\{d(x,y):\ y\in C\}。$$

$d(x,C)=m$ 的意思如下：若$0<r<m$，以x 爲中心r 爲半徑的球與C 不相交，但當r 增大到m 時，球至少與C 有一交點。對於X 的任何兩個緊緻子集A 及B 定義

$$d(A,B)=Max\{d(x,B):\ x\in A\}。$$

這樣定義的函數d 並不對稱：

d(台北，台灣) $\neq$ d(台灣，台北) 。

取

$$h(A,B)=Max\{d(A,B),\ d(B,A)\}$$

就可以確定在

$H(X)=\{C:\ C$爲X的非空緊緻子集$\}$

上的距離函數（稱爲Hausdorff 距離）。可以證明：$(H(X),h)$ 也是一個完備距離空間。回想：距離空間(X,d) 上的縮距影射是指存在$0<k<1$ 使得任意兩點x,y 不等式

$$d(w(x),w(y))\leq kd(x,y)$$

成立的自影射w。這樣的w 可以誘導出$H(X)$ 上的自影射（也記爲w），它把

$$A\in H(X)$$

影射到

$$w(A)=\{w(x):\ x\in A\}。$$

若

$$w_1,\ w_2,\cdots,w_n$$

爲X 上的縮距影射，可以證明：

$$W:\ (H(X),h)\rightarrow(H(X),h)$$

$$W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)\cup\cdots\cup w_n(B)$$

定義出一個新的縮距影射。Banach 固定點定理告訴我們：該縮距影射W 必有唯一的固定點。也就是說：存在唯一X 的非空緊緻子集A 滿足

$$A=W(A)=w_1(A)\cup w_2(A)\cup\cdots\cup w_n(A)。$$

此集合A 等於任何$H(X)$ 上的點B 取n 次影射的合成所構成的序列$W^n(B),\ n=1,2,3,\cdots$ 的極限：

$$A=\lim W^n(B)。$$

以下我們說明如何使用這個原理，利用計算機的繪圖功能來展示此固定點的形狀。爲了達到簡明、迅速的效果我們採取具有繪圖功能並且可以宣告子程式的Turbo Basic 作爲程式語言。

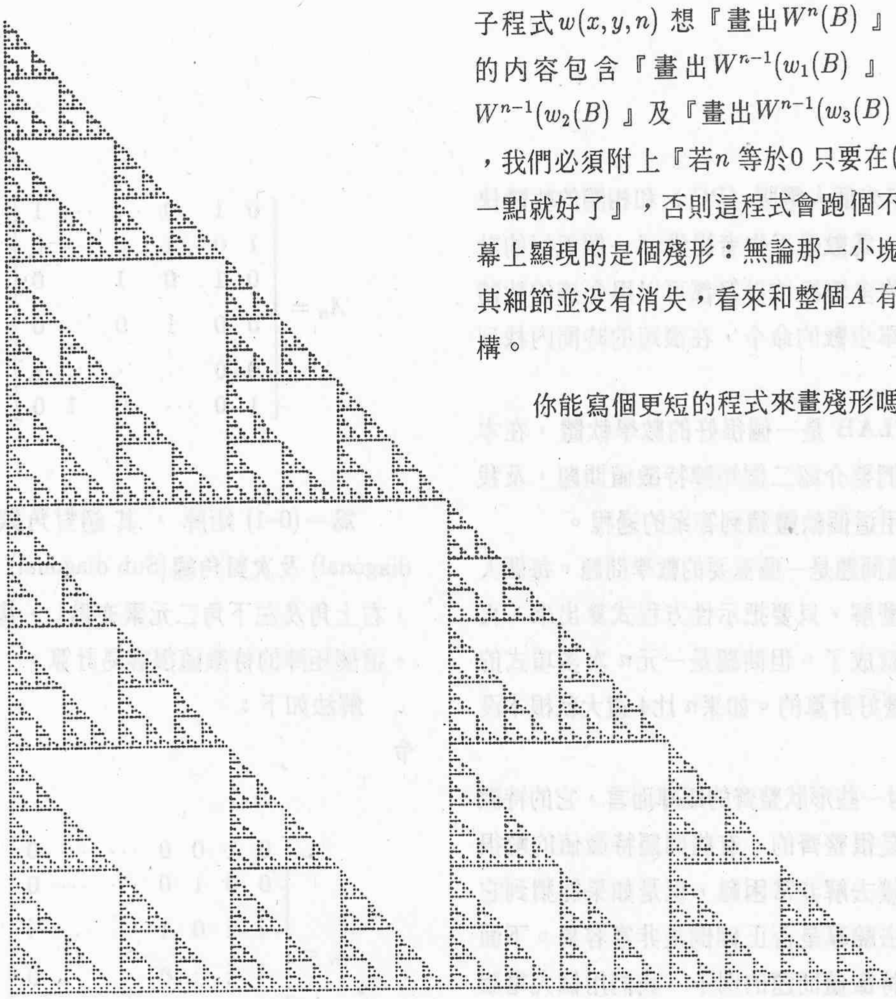
問題：

畫出平面上滿足

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$$

的非空緊緻子集A，其中w_1, w_2, w_3 爲平面R^2 上的縮距影射

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= (x/2, y/2), \\ w_2(x,y) &= (x/2+1/2, y/2), \\ w_3(x,y) &= (x/2, y/2+1/2)。\end{aligned}$$



$n=8$ 產生的Sierpinski 三角形

解答：

```
screen 2
window (0,0) - (4/3,1)
cls
sub w(x,y,n)
  if n = 0 then pset(x,y) : exit sub
  call w((x+1)/2,y/2,n-1)
  call w(x/2,(y+1)/2,n-1)
  call w(x/2,y/2,n-1)
end sub
call w(0,0,8)
```

說明：

只要考慮$B=\{(x,y)\}$ 所對應的$W^n(B)$ 就夠了。整個程式建立於關係式

$W^n(B) =$

$W^{n-1}(w_1(B)) \cup W^{n-1}(w_2(B)) \cup W^{n-1}(w_3(B))$ 。

子程式$w(x,y,n)$ 想『畫出$W^n(B)$ 』；因此它的內容包含『畫出$W^{n-1}(w_1(B)$ 』、『畫出$W^{n-1}(w_2(B)$ 』及『畫出$W^{n-1}(w_3(B)$ 』。當然，我們必須附上『若n 等於0 只要在(x,y) 上點一點就好了』，否則這程式會跑個不停！螢光幕上顯現的是個殘形：無論那一小塊放大之後其細節並沒有消失，看來和整個A 有一樣的結構。

你能寫個更短的程式來畫殘形嗎？