



# 數學實驗教學舉隅



圖四

循如下的程序：觀察現象→發現（或提出）問題→介紹工具（或概念）→回答問題→解釋現象，是一種理想的教學模式（註）。

底下以圓錐曲線為例，說明此一教學模式。

教學的對象是尚未學過圓錐曲線的高中生；教學的目標是介紹圓錐曲線及它們的光學性質。

先談橢圓的情形：

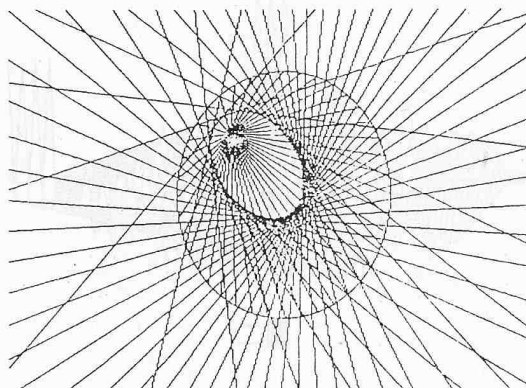
1. 觀察現象

## 1. 觀察現象

在一張紙上畫一個定圓，圓內取一定點，將此定點對準圓上某一點重疊，此時該紙被摺出一條直線摺痕，如果對準圓上的 $n$ 個點作重疊，便摺出 $n$ 條直線摺痕，這些摺痕圍出一條曲線。

為能清楚而再三的觀察上述現象，我們利用軟體 Turbo Basic 語言寫出一個程式，使在終端機上呈現上述的數學現象（圖一）。它可以快速地每隔0.1秒就繪出一條摺痕，也可以控制在緩慢地每隔5或10秒繪出一條摺痕。

葉東進



圖一

## 2. 提出問題

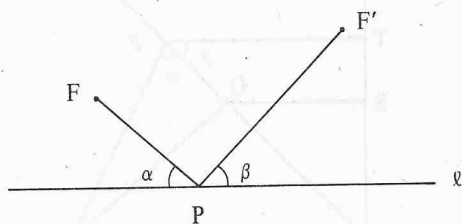
- (1) 這些摺痕圍出一條什麼樣的曲線？
- (2) 這些摺痕與圍出的曲線之間有什麼關係？
- (3) 這個定圓、定點及摺痕與所圍出的曲線，四者之間有什麼關係？

## 3. 介紹工具(或概念)

控制在較為緩慢地以每隔2秒（甚或4秒）

讓電腦繪出一條摺痕。整個繪圖過程觀察數遍之後，教師開始介紹下列概念與工具：

- (1) 什麼是橢圓。
- (2) 橢圓的切線。
- (3) 橢圓的光學性質。
- (4) 一個極小定理：



圖二

平面上，已知直線  $l$ ，及在  $l$  的同側的兩定點  $F$  與  $F'$ （圖二）。若點  $P$  是  $l$  上使  $\overline{PF} + \overline{PF'}$  為極小的點，則  $\angle\alpha = \angle\beta$ 。

教師在此一過程中，務必要一再而清晰地交待橢圓及其切線的意義，橢圓的光學性質及極小定理的內容。

#### 4. 回答問題、解釋現象

介紹上面所列的概念與工具之後，一定要讓學生有機會試著自己回答先前提出的三個問題，儘可能把它作為一件家庭課業，讓學生有充裕的時間作思索。隨後，教師再對學生們的回答給出修正、補充及整理，並把現象解釋清楚。

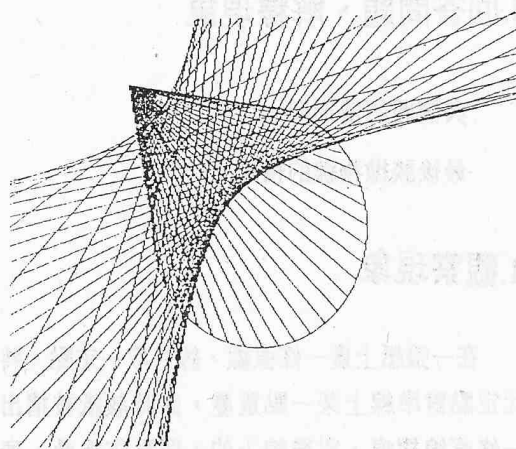
其次談雙曲線的情形。

#### 1. 觀察現象

在一張紙上畫一個定圓，圓外取一定點，將此定點對準圓上某一點重疊，此時該紙被摺出一條直線摺痕，如果對準圓上的  $n$  個點作重疊，便摺出  $n$  條直線摺痕，這些摺痕圍出一條曲線。

仿橢圓的情形，我們仍利用軟體 Turbo Basic 語言寫出一個程式，使在終端機上呈現

上述的數學現象（圖三）。呈現速度的快慢仍然加以控制。



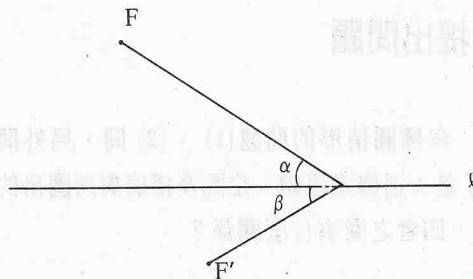
圖三

#### 2. 提出問題

與橢圓的情形相同的三個問題。

#### 3. 介紹工具(或概念)

- (1) 什麼是雙曲線。
- (2) 雙曲線的切線。
- (3) 雙曲線的光學性質。
- (4) 一個極大定理：



圖四

平面上，已知直線  $l$ ，及在  $l$  的異側的兩定點  $F$  與  $F'$ （圖四）。若點  $P$  是  $l$  上使  $|\overline{PF} - \overline{PF'}|$

為極大的點，則  $\angle\alpha = \angle\beta$ 。

#### 4. 回答問題、解釋現象

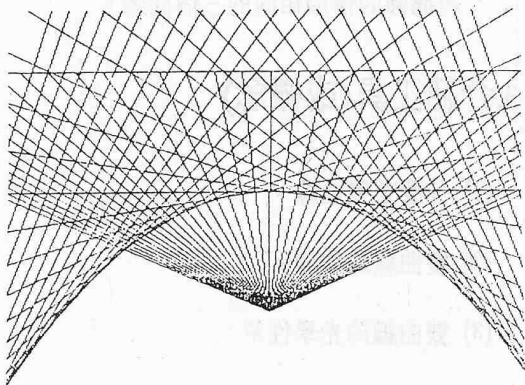
與橢圓的情形同。

最後談拋物線的情形。

##### 1. 觀察現象

在一張紙上畫一條直線，線外取一定點，將此定點對準線上某一點重疊，此時該紙被摺出一條直線摺痕，對準線上的  $n$  個點作重疊，便摺出  $n$  條直線摺痕，這些摺痕圍出一條曲線。

我們利用 Turbo Basic 語言寫出一個程式，使在終端機上呈現上述的數學現象（圖五）。呈現的速度仍然加以控制。



圖五

##### 2. 提出問題

與橢圓情形的問題(1)、(2)同，另外問題(3)是：這條定直線、定點及摺痕與所圍出的曲線，四者之間有什麼關係？

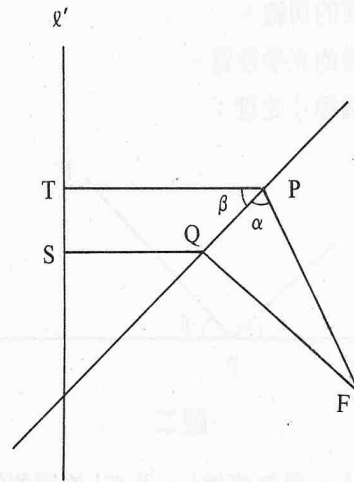
##### 3. 介紹工具(或概念)

(1) 什麼是拋物線。

(2) 拋物線的切線。

(3) 拋物線的光學性質。

(4) 一個定理：



圖六

平面上，已知直線  $l$  與  $l'$ ，及不在  $l$  與  $l'$  上的定點  $F$ （圖六）。若  $l$  上的點，除了  $P$  能滿足： $P$  到  $F$  的距離  $\overline{PF}$  等於  $P$  到  $l'$  的垂直距離  $\overline{PT}$  之外，其它的點  $Q$  皆滿足： $\overline{QF}$  大於  $Q$  到  $l'$  的垂直距離  $\overline{QS}$ ，則  $\angle\alpha = \angle\beta$ 。

#### 4. 回答問題、解釋現象

與橢圓的情形同。

（註）作者曾於79年7月17日，在由中山女中主辦的北市高中數學夏令營中，對高一升上高二的學生進行此一模式的實際教學。

#### 參考資料

葉東進：錐線的光學性質，科學教育月刊，96期。