數學軟體專題

試算表的妙用

全任重

早期的個人電腦之所以能夠廣泛被人們應用於各行各業，試算表(Spreadsheet) 可謂立下了極大的功勞。你可知道試算表也能協助大家瞭解數學嗎？以下我們將介紹使用試算表來觀察數學現象的種種可能。

PASCAL三角形

每當我們進入一個新的數學實驗環境裡，心中必定很想知道有那些工具最容易操作、摸索一下陌生的方法看看能否促使我們產生清楚的數學概念。這時可以不妨試試看在新的環境裡要如何去產生Pascal 三角形。

在APL 語言裡只要寫三句話

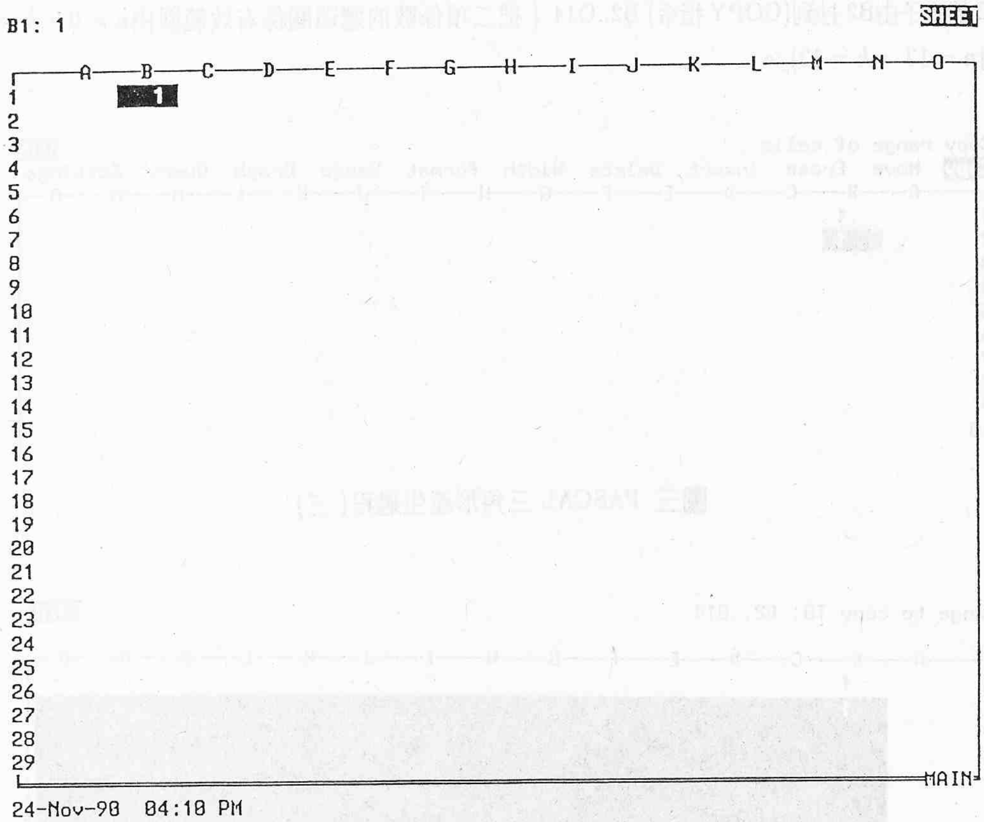
```
    ∇ PASCAL [N]
[1] P ← 1
[2] P
[3] → 2 × N ≥ ρ ← (0,P) + (P,0)
    ∇
```

就可以把Pascal 三角形呈現於顯示器上。這三句程式看來很短，卻不容易用簡單的幾句話把它解釋得清楚。（要瞭解APL 程式我們必須從右邊讀往左邊！）這個例子充分說明：APL 可以很精簡的表現數學演算過程，但除非人們改變寫數學式子的習慣，這種語言很難廣泛的被接受。

試算表提供給使用者整齊的輸入環境：使用者只要將矩陣裡適當的位置填入恰當的式子或數字就好了。既然Pascal 三角形中每個數字都等於

『位於它上面及位於它的左上角兩項的和』，我們可以利用試算表，將空著的位置之數值設爲0 的特性設計出以下的步驟：

a. 在B1 填入1（宣告二項係數$\binom{n}{k}$的初始值$\binom{0}{0}=1$）；

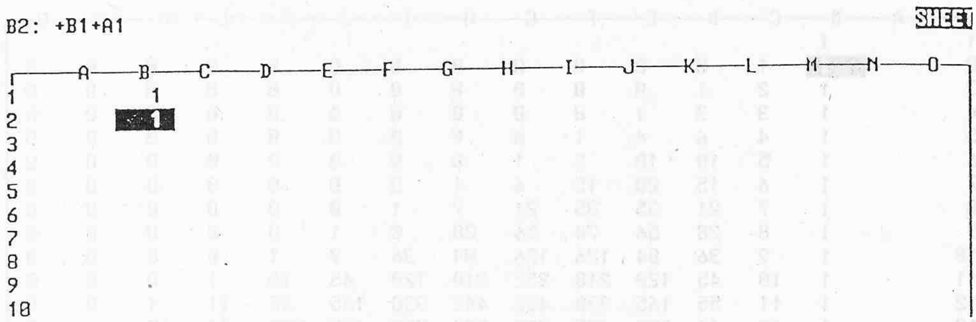


圖一 PASCAL 三角形產生過程(一)

b. 在B2 填入式子+A1+A2 (相當於聲明二項係數的遞迴關係

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

由$n=0$ ，$k=0$ 開始) ;



圖二 PASCAL 三角形產生過程(二)

c. 將B2 的式子由B2 抄到(COPY 指令) B2..O14（把二項係數的遞迴關係有效範圍由$n=0$，$k=0$ 延伸到$n=13$，$k=13$）。

```
Copy range of cells                                                         MENU
Copy  Move  Erase  Insert  Delete  Width  Format  Range  Graph  Query  Settings
    A    B    C    D    E    F    G    H    I    J    K    L    M    N    O
1        1
2        1
3
4
5
6
7
8
9
10
```

圖三 PASCAL 三角形產生過程(三)

```
Range to copy TO: B2..O14                                                   POINT
    A    B    C    D    E    F    G    H    I    J    K    L    M    N    O
1        1
2        1
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
```

圖四 PASCAL 三角形產生過程(四)

B2: +B1+A1　　SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		1													
2		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3		1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4		1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6		1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7		1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0
8		1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0
9		1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0
10		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0
11		1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0
12		1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0
13		1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0
14		1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1
15															
16															

圖五 PASCAL 三角形產生過程(五)

經過以上過程所產生的Pascal 三角形，不折不扣的將藏在

『這項是位於它上面及位於它的左上角兩項的和』

這句話背後的抽象數學公式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

原形畢露之。

Stirling循環三角形

欲安排n 人圍坐於k 個圓桌，每張桌子可容納n 人但不能空著，問坐法若干？在這問題裡，圓桌彼此沒有區分，無論在那一張桌子，兩種坐法視爲相異若且唯若存在某人有不同的左（或右）鄰坐者。

設坐法的個數爲$\left[{n \atop k}\right]$，你是其中一人。若你獨霸一桌，則其他$n-1$ 人有$\left[{n-1 \atop k-1}\right]$種方法分坐$k-1$ 桌。否則先請其他$n-1$ 人分坐於k 桌，由『植樹問題』得知共有$n-1$ 個間隙可插入，因此你有$(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$種方法與別人共桌。故

$$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]。$$

利用這個遞迴關係加上明顯的初始值

$$\left[{1 \atop 1}\right] = 1,$$
$$\left[{n \atop k}\right] = 0 \text{，若} k > n$$

可把$\left[{n \atop k}\right]$排列成三角形的數組：

$$\begin{array}{ccccc}
\left[{1 \atop 1}\right] & & & & \\
\left[{2 \atop 1}\right] & \left[{2 \atop 2}\right] & & & \\
\left[{3 \atop 1}\right] & \left[{3 \atop 2}\right] & \left[{3 \atop 3}\right] & & \\
\left[{4 \atop 1}\right] & \left[{4 \atop 2}\right] & \left[{4 \atop 3}\right] & \left[{4 \atop 4}\right] & \\
\left[{5 \atop 1}\right] & \left[{5 \atop 2}\right] & \left[{5 \atop 3}\right] & \left[{5 \atop 4}\right] & \left[{5 \atop 5}\right] \\
 & & \cdots & &
\end{array}$$

此數組稱爲Stirling 循環三角形，其中Stirling 第一類數字$\left[{n \atop k}\right]$是用來數有若干含有k 個軌道的n- 排列。如同Pascal 三角形一樣，Stirling 循環三角形裡的每一項都等於左上角及位於其上面那項的『某倍數』之和。這裡『某倍數』是指『上面一列的列數』。如此可用試算表依循該原理來產生Stirling 循環三角形：

a. 設定$\left[{n \atop k}\right]$的列數$n=1,2,\cdots,9$ 於A1..A9;

b. 在C1 塡入數字1（表示$\left[{1 \atop 1}\right]=1$）；

c. 在C2 塡入式子 +B1+C1*$A1（規定$\left[{n \atop k}\right]$的遞迴關係

$$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$$

由$n=2, k=1$ 開始）；

d. 將C2 的式子由C2 抄到（COPY 指令）C2..K9（確定$\left[{n \atop k}\right]$的遞迴關係有效範圍由$n=2, k=1$ 延伸到$n=9, k=9$）。

A29: SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1		1								
2	2		1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3		2	3	1	0	0	0	0	0	0
4	4		6	11	6	1	0	0	0	0	0
5	5		24	50	35	10	1	0	0	0	0
6	6		120	274	225	85	15	1	0	0	0
7	7		720	1764	1624	735	175	21	1	0	0
8	8		5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	0
9	9		40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											

MAIN

24-Nov-90 05:03 PM

圖六 Stirling 循環三角形(n=1, 2, ⋯ 9)

Stirling子集合三角形

若將n 人分成k 組，問有若干種分法？這問題僅依靠『同組』或『異組』的關係來辨別分組之異同，各組不另取名區分。不同的分組總會把其中兩人由『同組』變爲『異組』或由『異組』變爲『同組』。

設分組的個數爲$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$，你是其中一人。若你自成一組，則其他$n-1$ 人有$\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$種方法分成$k-1$ 組。否則令其他$n-1$ 人先分成k 組，你再加入其中一組，因此你有$k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$種方法與他人共組。故

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}。$$

可以利用這個遞迴關係加上明顯的初始值

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1,$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0 \text{ 若} k > n$$

把$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$排列作三角形的數組：

$$\begin{matrix}
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} & & & & \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} & & & \\
\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} & & \\
\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} & \\
\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \right\} \\
 & & \cdots & &
\end{matrix}$$

此數組稱爲Stirling 子集合三角形。裡面出現的Stirling 第二類數$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$是用來求有多少種方法將集合$\{1,2,\cdots,n\}$分割成$k$個不相交的非空子集合的聯集。如同Pascal 三角形一樣，Stirling 子集合三角形裡的每一項爲左上角的『某倍數』與位於上面那項相加所得。這裡『某倍數』是指『行數』。我們不妨教懂試算表這個原理來產生Stirling 子集合三角形：

a. 設定$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$的行數$k$=1,2, $\cdots$,9 於B1..J1；

b. 在B2 塡入數字1（表示$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$）；

c. 在B3 塡入式子 +A2+B2*B$1（設定$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$的遞迴關係

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

由$n = 2$, $k = 1$ 開始）；

d. 將B3 的式子由B3 抄到（COPY 指令）B3..J10（聲明$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$的遞迴關係有效範圍由$n = 2$, $k = 1$ 延伸到$n = 9$, $k = 9$）。

A29:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1								
3		1	1	0	0	0	0	0	0	0
4		1	3	1	0	0	0	0	0	0
5		1	7	6	1	0	0	0	0	0
6		1	15	25	10	1	0	0	0	0
7		1	31	90	65	15	1	0	0	0
8		1	63	301	350	140	21	1	0	0
9		1	127	966	1701	1050	266	28	1	0
10		1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										

MAIN

24-Nov-90　05:09 PM

圖七 Stirling 子集合三角形(n=1, 2, $\cdots$ 9)

Euler 三角形

設

$$p = p_1 p_2 \cdots p_n$$

爲一n-排列。若p 有k 個順次序的相鄰元素（集合$\{j : p_j < p_{j+1}\}$ 的個數爲k），則p 稱爲具有k

個『遞增』。設$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$爲所有 n-排列中具有k個『遞增』之排列的個數。以式子來表示：

$S_n = \{p : p$ 爲 n-排列$\}$；

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = |\{p \in S_n : |\{j : p_j < p_{j+1}\}| = k\}|$$

$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$彼此之間的關係是這樣的：若將$n$ 插入所有的 $(n-1)$-排列的頭或尾或中間，我們將獲得所有的 n-排列。假設n 插入 $(n-1)$-排列q 的位置j 而變成排列p ：

$$p = q_1 q_2 \cdots q_{j-1} n q_j \cdots q_{n-1}\text{。}$$

當$j=1$ 或$q_{j-1} < q_j$ 時，p 的『遞增』個數與q 的『遞增』個數一樣；當$j=n$ 或$q_{j-1} > q_j$ 時，p 的『遞增』個數比q 的『遞增』個數大1 。如此看來，p 若有k 個『遞增』，p 只能來自兩種可能性：

(1) 從具有k 個『遞增』的q 產生的；

(2) 從具有$k-1$ 個『遞增』的q 產生的。

每個具有k 個『遞增』的q 產生$(k+1)$ 個具有k個『遞增』的p ，而每個具有$k-1$ 個『遞增』的q 產生$[(n-2)-(k-1)+1]$ 個具有k 個『遞增』的p 。把這句繞口令唸通之後就獲得$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$的遞迴關係：

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\text{。}$$

把$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$排列成三角形的數組：

$$\begin{array}{lllll}
\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle & & & & \\
\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {2 \atop 1} \right\rangle & & & \\
\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle & & \\
\left\langle {4 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle & \left\langle {4 \atop 3} \right\rangle & \\
\left\langle {5 \atop 0} \right\rangle & \left\langle {5 \atop 1} \right\rangle & \left\langle {5 \atop 2} \right\rangle & \left\langle {5 \atop 3} \right\rangle & \left\langle {5 \atop 4} \right\rangle \\
 & & \cdots & &
\end{array}$$

此數組稱爲Euler 三角形。如同Stirling 三角形一樣，Euler 三角形裡的每一項都由其左上角的『某倍數』與位於其上面那項的『某倍數』之和。這裡第一個『某倍數』是指『列數減行數』，而第二個『某倍數』是指『下一行數』。由此不難利用試算表來產生Euler 三角形：

a. 設定$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$的行數$k$=0,1, $\cdots$,9 於C1..L1 ；

b. 設定$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$的列數$n$=1,2, $\cdots$,10 於A2..A11 ；

c. 在C2 填入數字1 (表示$\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle$=1) ；

d. 在C3 填入式子

+B2 * ($A3-C$1) + C2 * D$ 1

(相當於聲明$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$的遞迴關係

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

由$n=2$ ，$k=0$ 開始) ；

e. 將C3 的式子由C3 抄到(COPY 指令) C3..L11 (相當於聲明$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$的遞迴關係有效範圍由$n=2$ ，$k=0$ 延伸到$n=10$ ，$k=9$) 。

或許當初試算表的程式設計前輩沒有預料到試算表可以有這麼巧妙的應用！

A1:　　SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1	1									
3		2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4		3	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
5		4	1	11	11	1	0	0	0	0	0	0
6		5	1	26	66	26	1	0	0	0	0	0
7		6	1	57	302	302	57	1	0	0	0	0
8		7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0	0
9		8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	0
10		9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0
11		10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1
12												
13												
14												

圖八 Euler 三角形(n=1, 2, $\cdots$ 10)

開方根的近似值

考慮以下問題：如何求$\sqrt{3}$ 的近似值？假設x 爲方程式

$$x^2 = 3$$

之解，則$x = 3/x$ 。如果x 稍微不準確（不妨假設）被低估了，則$3/x$ 會偏大。靜靜的想一下：取x 和$3/x$ 的平均值豈不是個更佳的估計嗎？如此不難想到取滿足關係

$$\begin{aligned} x(n+1) &= [x(n) + 3/x(n)]/2 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

的數列$x(1), x(2), \cdots$ 來逼近$\sqrt{3}$ 。有了這構想後不難嚴格的證明以上的數列的確收斂到$\sqrt{3}$ 。我們甚至可以把上面遞迴關係裡的3 改寫爲任意正數p ，依樣畫葫蘆地導出並且證明一套求$\sqrt{p}$ 近值的計算法則。

仔細觀察一下這個逼近過程，它好像在說：『取開方根』的動作可以由一系列的『加、除』動作組合而成的！本著數學實驗的精神，我們大膽的把以上關係改寫成

$$x(n+1) = [x(n) + x(n)^{-1}p]/2$$

而考慮它對於二階方陣p 是否也成立。（取$x(1)$ 爲單位矩陣。）當然，正如在實數的情況一樣，我們必須限制p 爲『非負的』。『二階方陣相加』、『取二階方陣之逆』及『矩陣相乘』都是試算表的拿手動作。以下的試算表中：

a. A 、B 兩行爲x(n) ；

b. 爲了取逆矩陣方便起見，我們將$x(n)$ 之行列式設於行D ；

c. F 、G 兩行爲$x(n)^{-1}$ ；

d. 將想求平方根的矩陣p 設於I5..J6 ；

e. L 、K 兩行爲矩陣p 與$x(n)$ 的乘積。

```
L27: +$F27*I$5+$G27*I$6                                             SHEET
   A    B    C    D    E    F    G    H    I    J    K    L    M    N    O
1   Approximation of the square root
2
3       x(n)          det x(n)   x(n)^-1          p             p*x(n)
4
5     1     0            1        1     0        1    -3        1    -3
6     0     1                     0     1       -3    10       -3    10
7
8     1  -1.5         3.25     1.69  0.46                    0.30  -0.4
9  -1.5   5.5                  0.46  0.30                    -0.4  1.69
10
11 0.65  -0.9         1.38     2.58  0.70                    0.47  -0.7
12 -0.9  3.59                  0.70  0.47                    -0.7  2.58
13
14 0.56  -0.8         1.02     3.01  0.82                    0.54  -0.8
15 -0.8  3.09                  0.82  0.54                    -0.8  3.01
16
17 0.55  -0.8         1.00     3.05  0.83   ----------L--------------M--------
18 -0.8  3.05                  0.83  0.55   16
19                                          17   0.5546499486 -0.8319749229
20 0.55  -0.8         1.00     3.05  0.83   18  -0.8319749229  3.0505747174
21 -0.8  3.05                  0.83  0.55   19
22                                          20   0.5547001939 -0.8320502909
23 0.55  -0.8            1     3.05  0.83   21  -0.8320502909  3.0508510667
24 -0.8  3.05                  0.83  0.55   22
25                                          23   0.5547001962 -0.8320502943
26 0.55  -0.8            1     3.05  0.83   24  -0.8320502943  3.0508510792
27 -0.8  3.05                  0.83  0.55   25
28                                          26   0.5547001962 -0.8320502943
29 0.55  -0.8            1     3.05  0.83   27  -0.8320502943  3.0508510792
                                                                          W1
24-Nov-90  09:27 AM
```

圖九 矩陣$P=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$開方根的近似值

從這項實驗可以看出：若$\{x(n)\}$收斂，則它收斂得頗快。對於正定矩陣(positive definite matrices)此算法當然有效。對於某些不對稱而有負元素的矩陣它亦有效。然而對於某些行列式大於0的矩陣它卻無效。你能找出恰好有那些矩陣能用這個逼近過程來求開方根嗎？

一旦發現這樣的逼近過程對於（許多）二階方陣成立，沒有任何因素能阻止我們把考慮的領域放大到n階方陣上、甚至到無窮維希氏空間上的有界算子上及Banach* 代數上。後兩者由於缺乏行列式的推廣，『非負的』元素只能取如b^*b的元素。雖然此算則可以應用於各種數學結構上，能夠由『可交換』的數量情況而推廣到『不可交換』的矩陣情況可謂構想上的突破！這項突破的經驗倒可以由試算表上的數學實驗獲得。

將$\tan n\theta$表示爲$\tan\theta$的函數

現成的套裝軟體中越來越多具有符號處理的功能。可是無論是Derive或Mathematica或Maple或REDUCE都無法立刻告訴你如何將$\tan n\theta$表示爲$\tan\theta$的函數。現在我們說明如何透過試算表來解決這個問題。

首先，我們看看如何透過試算表把$\cos n\theta$表示爲$\cos\theta$的函數。若將複角公式

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

裡的$\cos\theta$改寫爲x，而$\cos k\theta$改寫爲$T_k(x)$，則得到遞迴關係

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\ 。$$

由於$T_0\equiv 1$和$T_1(x)=x$均爲多項式函數，逐次代入這遞迴關係後容易看出每個T_n都是多項式函數—稱爲Chebyshev多項式。Chebyshev多項式的係數卻不難使用試算表依升冪次序列出：

B1: 1 SHEET

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1												
2		1											
3	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	-8	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	5	0	-20	0	16	0	0	0	0	0	0	0
7	-1	0	18	0	-48	0	32	0	0	0	0	0	0
8	0	-7	0	56	0	-112	0	64	0	0	0	0	0
9	1	0	-32	0	160	0	-256	0	128	0	0	0	0
10	0	9	0	-120	0	432	0	-576	0	256	0	0	0
11	-1	0	50	0	-400	0	1120	0	-1280	0	512	0	0
12	0	-11	0	220	0	-1232	0	2816	0	-2816	0	1024	0
13	1	0	-72	0	840	0	-3584	0	6912	0	-6144	0	2048
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													

MAIN

24-Nov-90 05:41 PM Scroll

圖十 Chebyshev 多項式的係數(n=0, 1,$\cdots$, 12)

a. 在B1 格子裡填入1 (T_0 的第0 係數爲1 ，其他係數爲0) ；

b. 在C2 格子裡填入1 (T_1 的第1 係數爲1 ，其他係數爲0) ；

c. 在B3 格子裡填入式子2* A2–B1 (遞迴關係

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

對於T_2 的第0 係數開始生效) ；

d. 將B3 格子裡的式子由B3 抄到（COPY 指令）B3..N13 （遞迴關係

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

對於$T_2,\cdots,T_{12}$ 的所有係數都生效）。

一旦發現使用試算 可以那麼容易把$\cos n\theta$ 表示爲$\cos\theta$ 的函數，我們會很自然的去考慮與$\tan\theta$ 有關係的三角恆等式

$$\tan(n+1)\theta = \frac{\tan\theta + \tan n\theta}{1 - \tan\theta\tan n\theta}\ 。$$

取$\tan\theta = x$ ，$\tan k\theta = p_k(x)/q_k(x)$ ，則這個式子即轉換成

$$\frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} = \frac{xq_n(x) + p_n(x)}{q_n(x) - xp_n(x)}$$

這樣就可以導出雙重遞迴關係

$$p_{n+1}(x) = xq_n(x) + p_n(x)$$
$$q_{n+1}(x) = q_n(x) - xp_n(x)\ 。$$

若初始值設爲

$$p_1(x) = x,\quad q_1(x) = 1$$

（這並非唯一的選擇！）則多項式函數p，q可逐次計算出來。像這一類的『聯立』遞迴關係並不能難倒試算表，巧妙的運用COPY指令照樣能爲我們解決問題。建立試算表的過程如下：

a. 於C1和B2格子裡各填入數字1（設定多項式p_1及q_1的係數）；

b. 在B4建立式子　+A2+B1（設定遞迴關係

$$p_{n+1}(x)=xq_n(x)+p_n(x)$$

由$n=1$的常數項開始）；

c. 在B5建立式子　+B2−A1（設定遞迴關係

$$q_{n+1}(x)=q_n(x)-xp_n(x)$$

由$n=1$的常數項開始）；

d. 將B4..B5的式子抄到（COPY指令）B4..L4（將聯立遞迴關係

$$p_{n+1}(x)=xq_n(x)+p_n(x)$$

$$q_{n+1}(x)=q_n(x)-xp_n(x)$$

延伸到$n=1$每一項係數）；

e. 把B4..L26範圍內的所有式子抄到（COPY指令）B7（這是整個COPY指令中最奇妙的動作！把一大片範圍內的所有式子抄到其中的一格居然能夠達到『一塊塊重覆』的效果。這樣就將聯立遞迴關係

$$p_{n+1}(x)=xq_n(x)+p_n(x)$$

$$q_{n+1}(x)=q_n(x)-xp_n(x)$$

延伸到$n=9$的每一項係數）。

B4: +A2+B1　　SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			1									
2		1										
3												
4		0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
6												
7		0	3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
8		1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
9												
10		0	4	0	-4	0	0	0	0	0	0	0
11		1	0	-6	0	1	0	0	0	0	0	0
12												
13		0	5	0	-10	0	1	0	0	0	0	0
14		1	0	-10	0	5	0	0	0	0	0	0
15												
16		0	6	0	-20	0	6	0	0	0	0	0
17		1	0	-15	0	15	0	-1	0	0	0	0
18												
19		0	7	0	-35	0	21	0	-1	0	0	0
20		1	0	-21	0	35	0	-7	0	0	0	0
21												
22		0	8	0	-56	0	56	0	-8	0	0	0
23		1	0	-28	0	70	0	-28	0	1	0	0
24												
25		0	9	0	-84	0	126	0	-36	0	1	0
26		1	0	-36	0	126	0	-84	0	9	0	0
27												
28		0	10	0	-120	0	252	0	-120	0	10	0
29		1	0	-45	0	210	0	-210	0	45	0	-1

MAIN

24-Nov-90　05:31 PM

圖十一　將$\tan n\theta$表示爲$\tan\theta$的函數$(n=1, 2, \cdots, 10)$

多項式p_n及q_n的係數不難由建立好的試算表裡讀出。比方說：(0 5 0 -10 0 1) 那一列說明：

$$p_5(x) = 5x - 10x^3 + x^5,$$

而(1 0 -21 0 35 0 -7) 那一列說明：

$$q_7(x) = 1 - 21x^2 + 35x^4 - 7x^6 。$$

仔細的再觀察試算表裡所顯示的，你會由過去累積的經驗獲得意想不到的發現！假如你輪流把p_5 和q_5 的（非0）係數讀一遍，就會冒出一列像

(1 5 -10 -10 5 1)

的數字圖案！這些是什麼東西？豈不就是二項係數

$$\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$$

附帶+, +, −, −, +, + 罷了！將整個數字圖案與Pascal 三角形對齊比較後就不難導出以下封閉式子：

$$\tan n\theta = \frac{\binom{n}{1}\tan\theta - \binom{n}{3}\tan^3\theta + \binom{n}{5}\tan^5\theta - \cdots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2\theta + \binom{n}{4}\tan^4\theta - \binom{n}{6}\tan^6\theta + \cdots}$$

相不相信計算機可以引導人們發現如何將$\tan n\theta$ 表示爲$\tan\theta$ 的函數？

反冪級數

兩個形式冪級數

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$$

$$C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

的乘積爲形式冪級數

$$B(x)C(x) = A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

其中係數a_k 由公式

$$a_k = b_0c_k + b_1c_{k-1} + \cdots + b_kc_0$$

給出。

今設B(x) 之首項係數爲1，則以上關係變成

$$c_k = a_k - b_1c_{k-1} - b_2c_{k-2} - \cdots - b_kc_0 \quad (*)$$

欲求形爲

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r}{1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_sx^s}$$

的有理函數於0 的冪級數展開式

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

可由下表看出：

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_0	c_0	c_0b_1	c_0b_2	c_0b_3	c_0b_4	c_0b_5
a_1	c_1	c_1b_1	c_1b_2	c_1b_3	c_1b_4	$\boxed{c_1b_5}$
a_2	c_2	c_2b_1	c_2b_2	c_2b_3	$\boxed{c_2b_4}$	c_2b_5
a_3	c_3	c_3b_1	c_3b_2	$\boxed{c_3b_3}$	c_3b_4	c_3b_5
a_4	c_4	c_4b_1	$\boxed{c_4b_2}$	c_4b_3	c_4b_4	c_4b_5
0	c_5	$\boxed{c_5b_1}$	c_5b_2	c_5b_3	c_5b_4	c_5b_5
$\boxed{0}$	$\boxed{c_6}$	c_6b_1	c_6b_2	c_6b_3	c_6b_4	c_6b_5
		……				

每一項c_k 均爲位於左方之a_k 減去乘法表裡『東北方』各項之和。使用試算表來建立乘法表並不困難。只要事先在乘法表的上方預先留空s 列就可避免重覆輸入係數$c_0, c_1, \cdots, c_{s-1}$ 的式子。一旦設好c_s 爲左方一項減去右上方s 項之和，然後把該關係抄到(COPY 指令) 所有c_k 所在的空格，整個計算即告完成。

以上方法可以加以改良使得試算表使用更少的記憶體。式子(*) 說明各c_k 等於a_k 與固定向量$(b_1, b_2, \cdots, b_S)$ 和向量$(c_{k-1}, c_{k-2}, \cdots, c_{k-s})$ 的點積之差。故計算過程可簡化爲：

a. 將係數a_k 塡入A 行；

b. 將係數b_k 塡入B 行；

c. 於C(s+1) 設定c_0 的式子，然後把該式子抄

到（COPY 指令）C(s+2), C(s+3)…。以 $s=5$ 爲例，步驟c 先設定式子

+A1+ $ B $ 1 * C5+ $ B $ 2 * C4
+ $ B $ 3 * C3 + $ B $ 4 * C2
+ $ B $ 5 * C1

於C6 格，然後把該式子COPY 到C6..C26（想展開多幾項就COPY 多幾項。）

A1: -3 SHEET

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-3	1						
2	5	2						
3	-7	-3						
4	0	-1						
5	0	1						
6	0		-3					
7	0		2					
8	0		-11					
9	0		2					
10	1		-23					
11			9					
12			-30					
13			44					
14			-18					
15			129					
16			0					
17			238					
18			-87					
19			242					
20			-517					
21			-10					
22			-1445					
23			-243					
24			-2344					
25			998					
26			-1526					
27			6300					
28			2355					
29			16191					

MAIN

24-Nov-90 05:46 PM

圖十二 有理函數

$$f(x)=\frac{-3+5x-7x^2+x^9}{1+x+2x-3x^2-x^4+x^5}$$

於$x=0$ 的二十四項Taylor 展開式的係數

我們可以拿現成的符號處理套裝軟體Derive 與試算表作個不公平的比賽：在Derive 裡使用現成的Taylor 展開指令而在試算表裡使用以上方法，看看誰先計算出有理函數

$$f(x)=\frac{-3+5x-7x^2+x^9}{1+x+2x-3x^2-x^4+x^5}$$

由第0 項到第10 項的Taylor 展開式。這時Derive 採用道地的微積分教科書方法，取函數的逐次微分、求值，然後代入Taylor 公式裡，難怪比起使用遞迴關係去計算的試算表慢上幾百倍！

牛頓和

令多項式函數

$$g(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$$

的根爲$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 其p 次方之和

$$S_p = z_1^p + z_2^p + \cdots + z_n^p$$

稱爲(z) 的牛頓和。牛頓發現可以不必解方程式$g(z) = 0$ 而將各S_p 求出，其原理如下：
若將等式

$$\begin{aligned} f(y) &\equiv 1 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_n y^n \\ &= (1 - z_1 y)(1 - z_2 y) \cdots (1 - z_n y) \end{aligned}$$

的兩邊作對數導數，則有

$$\begin{aligned} -\frac{f'(y)}{f(y)} &= \frac{z_1}{1 - z_1 y} + \frac{z_2}{1 - z_2 y} \\ &\quad + \cdots + \frac{z_n}{1 - z_n y} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} z_1 (z_1 y)^p + \sum_{p=0}^{\infty} z_2 (z_2 y)^p \\ &\quad + \cdots + \sum_{p=0}^{\infty} z_n (z_n y)^p \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} S_{p+1} y^p \text{。} \end{aligned}$$

有理函數$-f'(y)/f(y)$ 的冪級數展開式裡所出現的係數$S_1, S_2, \cdots$ 恰好就是要找的牛頓和。前一段，我們討論完畢如何使用試算表來計算有理函數的Taylor 展開，現在正好可以派上用場。

```
A1: 'Newton's formula for sums of powers of roots                SHEET

     A         B         C         D         E         F         G         H
1   Newton's formula for sums of powers of roots
2      c(k)        k   k*c(k)      s(k)
3         1
4         2
5         0
6        -2
7                  1        1        -1
8                  2        4        -3
9                  3        0         5
10                 4       -8         9
11                                  -21
12                                   -3
13                                   55
14                                  -31
15                                 -121
16                                  177
17                                  175
18                                 -591
19                                   -1
20                                 1537
21                                -1185
22                                -3071
23                                 5439
24                                 3777
25                               -17025
26                                 3329
27                                41599
28                               -40703
29                               -76545
                                                                   MAIN
24-Nov-90   05:48 PM
```

圖十三 多項式$g(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 - 2$ 之牛頓和(k=1, 2, $\cdots$,21)

A^n的跡數

設二階方陣A 的行列式爲m 、跡數（對角線元素之和）爲t 。熟悉的線性代數定理告訴我們矩陣A^n 的行列式是m^n 。是否A^n 的跡數（記爲$T(n)$ ）也有漂亮的式子？現成的套裝軟體無

法以一問一答的方式回答這個問題。如同以上的幾個例子，只要事先作『人腦處理』，電腦一樣可以協助我們尋找答案。

若矩陣A 的兩個特徵值爲a 和b 。則

$m = ab$

$t = a + b$

由於A^n 的特徵值爲a^n 和b^n ，故

$m^n = a^n b^n$

$T(n) = a^n + b^n$

由恆等式

$a^n + b^n =$

$(a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})$

得到

$$T(n) = tT(n-1) - mT(n-2)。$$

由以上的三項遞迴關係及初始值

$T(0) = 2$ (A^0 爲二階單位矩陣)

$T(1) = t$

得知$T(n)$ 是由t 和m 經過『相乘、相減』若干次而得到。換句話說，$T(n)$ 是以t 和m 爲變數的多項式函數。把這個遞迴關係多看一眼，不難發現它和確定Chebyshev 多項式的遞迴關係幾乎一樣。$T(n)$ 的係數也能依循相同的步驟來產生。基本上，由特殊情況$m = 1$ 所獲得的係數就足以瞭解一般的情形。其原因如下：若單變數多項式$p(t)$ 夠資格使得每個行列式爲1 的二階矩陣A 都滿足

$$tr(A^n) = p(t)$$

則對於一般行列式$det(B)$ 不等於零的矩陣B ，下式成立

$$tr(B^n) = det(B)^{n/2} p[t/\sqrt{det(B)}]。$$

由此得知

$$T(n) = m^{n/2} p(t/\sqrt{m})。$$

$T(n)$ 的係數可由試算表列出，結果如下：

B3: +A2-B1 SHEET

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	2															
2		1														
3	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2	0	-4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	5	0	-5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-2	0	9	0	-6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	-7	0	14	0	-7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	0	-16	0	20	0	-8	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	9	0	-30	0	27	0	-9	0	1	0	0	0	0	0	0
11	-2	0	25	0	-50	0	35	0	-10	0	1	0	0	0	0	0
12	0	-11	0	55	0	-77	0	44	0	-11	0	1	0	0	0	0
13	2	0	-36	0	105	0	-112	0	54	0	-12	0	1	0	0	0
14	0	13	0	-91	0	182	0	-156	0	65	0	-13	0	1	0	0
15	-2	0	49	0	-196	0	294	0	-210	0	77	0	-14	0	1	0
16	0	-15	0	140	0	-378	0	450	0	-275	0	90	0	-15	0	1
17	2	0	-64	0	336	0	-672	0	660	0	-352	0	104	0	-16	0
18	0	17	0	-204	0	714	0	-1122	0	935	0	-442	0	119	0	-17
19																
20																
21																
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																
29																

MAIN

24-Nov-90 05:56 PM

圖十四 $T(n)$ 的係數

由上面的解釋得知：(0, -7, 0, 14, 0, -7, 1) 代表

$$\begin{aligned} tr(A^7) &= T(7) \\ &= t^7 - 7t^5m + 14t^3m^2 - 7tm^3 \end{aligned}$$

特徵多項式與伴隨矩陣

設 A 為 n 階方陣。Leverrier 、Souriau 、Frame 及 Faddeev 等四人前後花了一個世紀的時間發現（再發現）了一種不需要展開行列式就能求 A 的特徵多項式與伴隨矩陣的方法。其過程如下：

定義

$$\begin{array}{ll} F_1 = I & b_1 = -tr(F_1A)/1 \\ F_2 = F_1A + b_1I & b_2 = -tr(F_2A)/2 \\ & \cdots \\ F_n = F_{n-1}A + b_{n-1}I & b_n = -tr(F_nA)/n \end{array}$$

則

(a) A 的特徵多項式為

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \\ &\quad + \cdots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned}$$

(b) 矩陣

$$\begin{aligned} B(x) &= x^{n-1}F_1 + x^{n-2}F_2 \\ &\quad + \cdots + xF_{n-1} + F_n \end{aligned}$$

滿足

$$B(x)(xI - A) = p(x)I \text{。}$$

因此，只要 x 不是 A 的特徵值，則 $B(x)/p(x)$ 為 $(xI - A)$ 的逆矩陣。$B(x)$ 稱為矩陣 A 的伴隨矩陣。

此公式的證明依賴以下三事：

(1) Cayley–Hamilton 定理：若 p 為矩陣 A 的特徵多項式，則 $p(A)$ 為零矩陣。

(2) 牛頓和公式：若 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 為多項式函數

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + a_n \qquad (*) \end{aligned}$$

的根，則其 k 次方之和

$$S_k = c_1^k + c_2^k + \cdots + c_n^k$$

（稱為牛頓和）滿足遞迴關係

$$\begin{aligned} ka_k &= -(S_k + S_{k-1}a_1 + S_{k-2}a_2 + \cdots \\ &\quad + S_1a_{k-1}) \text{。} \end{aligned}$$

(3) A^k 的每個特徵值都表示為 c^k ，其中 c 為 A 之某特徵值。

欲證明此公式，設 A 的特徵多項式具有形式 $(*)$ 。由 F_k 的定義可依 k=1, 2,$\cdots$, n 的次序逐次得到

$$\begin{aligned} F_k &= b_{k-1}I + b_{k-2}A + b_{k-3}A^2 \\ &\quad + \cdots + b_1A^{k-2} + A^{k-1} \qquad (**) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} kb_k &= -trF_kA \\ &= -tr(b_{k-1}A + b_{k-2}A^2 + \cdots + A^k) \\ &= -(a_{k-1}s_1 + a_{k-2}s_2 + \cdots \\ &\quad + a_1s_{k-1} + s_k) \\ &= ka_k \text{，} \end{aligned}$$

其中 s_k 為 A 的所有特徵值的 k 次方之和。

(a) 由此得證。式子 $(**)$ 說明

$$\begin{aligned} F_nA &= b_{n-1}A + b_{n-2}A^2 + \cdots \\ &\quad b_1A^{n-1} + A^n = -b_nI \end{aligned}$$

（最後的等式由事實 (1) 得之）。將 (b) 式左邊展開得

$x^nF_1 + x^{n-1}(F_2 - F_1A) + x^{n-2}(F_3 - F_2A) +$
$\cdots + x(F_n - F_{n-1}A) + (-F_nA);$

(b) 由此得證。

現在我們以$n = 4$ 爲例，説明如何教會試算表來作特徵多項式與伴隨矩陣的計算。

```
A1: 'Leverrier-Souriau-Frame-Faddeev Method                                    SHEET

┌────A───B───C───D───E───F───G───H───I───J───K───L───M───N───O───P───Q───R────┐
1    Leverrier-Souriau-Frame-Faddeev Method
2     k     F(k)                   A                        F(k)A        b(k)
3
4          1                     2   2   1   2          2   2   1   2
5              1                 1   1   1  -1          1   1   1  -1
6     1            1            -1  -1   2   1         -1  -1   2   1
7                      1         1   3  -2  -2          1   3  -2  -2       -3
8
9         -1   2   1   2                                1   5  -1  -7
10         1  -2   1  -1                               -2  -4   3   7
11    2   -1  -1  -1   1                               -1   1  -6  -4
12         1   3  -2  -5                                2  -8  10   7        1
13
14         2   5  -1  -7                                3 -11  19  12
15        -2  -3   3   7                               -3  11 -13 -12
16    3   -1   1  -5  -4                                0  -8  -2   0
17         2  -8  10   8                               -6  10  -2   6       -6
18
19        -3 -11  19  12                              -24   0   0   0
20        -3   5 -13 -12                                0 -24   0   0
21    4    0  -8  -8   0                                0   0 -24   0
22        -6  10  -2   0                                0   0   0 -24       24
23
24         0   0   0   0                                0   0   0   0
25         0   0   0   0                                0   0   0   0
26    5    0   0   0   0                                0   0   0   0
27         0   0   0   0                                0   0   0   0        0
28
```

a. 於A6 格填入1 ($k = 1$) ;

b. 於B4..E7 填入單位矩陣(這是F_1) ;

c. 於G4..J7 設定矩陣A (完成之後，只要修改位在這裡的『輸入』，即可看到對應的『輸出』;

d. 將式子

+$ B1 * G $ 4 + $ C1 * G $ 5
+ $ D1 * G $ 6 + $ E1 * G $ 7

建於L4 ;

e. 把L4 的式子由L4 抄到(COPY 指令) L4..O7 (設乘積F_1A) ;

f. Q7 反映b_1 的值，故設 -(L4+M5+N6+07)/A4 ;

g. 設F_2 於B9..E12;

h. 把L4..Q7 的式子COPY 到L9 (F_2A 及 b_2 由此得之) ;

i. 把A9..Q22 的式子COPY 到A14 (重覆過程f 至h, k=3,4,5) 。

當人們剛開機進入試算表時，面對的是一片空白。使用者在短短的幾分鐘教會不懂得獨自思考的機器去計算特徵多項式與伴隨矩陣。仔細看看最後一組非零矩陣：左面的矩陣F_{n-1}乘以矩陣A的結果$F_{n-1}A$仍是個數量矩陣！也就是說：我們順便也把A的逆矩陣（差個倍數）找到了！這種顯示逆矩陣的方式的確與衆不同。試算表最了不起的能力是在於它可以十分迅速的反映數字的修改。這類軟體的先天設計鼓勵人們隨意將游標移動到矩陣的每一個角落去調整參數來尋覓種種疑問的答案。每當矩陣的某個元素改變時，整個試算表內與該元素相關的格子也立刻跟著調整。你不妨試試修改矩陣A的$(2,3)$元素（如果想看到更理想的效果，修改數字的動作要快！快到一秒鐘內作兩次0與1的對調。）這時不難發現A的逆矩陣裡除了第3列及第2行以外，其他每一個元素值都在更改！數學理論上這個現象並不新鮮。但是站在數學實驗的立場來看這卻是件令人感到興奮的事，因爲這項實驗並非試算表的發明人想作的！就好比古人無法體會到玩電動遊樂器是多麼的著迷，唯有坐在現代先進的的個人電腦的前面人們才能感受到面對矩陣的『反射動作』所帶來的數學靈感。數學實驗裡最渴望見到的就是像這樣方便而迅速的『輸入』與『輸出』的環境。期望有一天APL、MATLAB、Derive、Maple、Mathematica ··· 等軟體都能夠改良矩陣『輸入』與『輸出』的方式，就好像操作試算表一樣的方便。

-本文作者任教於清華大學數學系-