

怎樣把中國

建為數學大國？

陳省身

一、引言

先從我個人說起：我1926年入天津南開大學，1930年數學系畢業。那時我的老師姜立夫先生是極少數有博士學位的人。現在聽說在台灣的數學博士在二百人以上，全世界的中國數學博士當超過千人。在這樣的基礎上，如何使中國的數學發展，使在廿一世紀的數學史上，中國是一個重要的區域，自然值得我們深思。

今年一件值得慶祝的事，是中國在國際數學競賽（International Mathematical Olympiad）獲得第一（第二，三名依次為蘇聯及美國）。不但如此，中國總分超出第二名蘇聯甚遠。參加者中，有四人得滿分，其中兩個是中國人。中國參加這競賽不久；1988年得第二名，去年（1989）也是第一名。

這項競賽是高中程度，不包括微積分。但題目需要思考，我相信我是考不過這些小孩子的。因此有人覺得，好的數學家未必長於這種考試，競賽勝利者也未必是將來的數學家。這個意見似是而非。數學競賽大約是在百年前在匈牙利開始的；匈牙利產生了同它的人口不成

比例的許多大數學家！

在最高深最活躍的數學方面，中國數學家亦有許多傑出的工作，無法盡舉，簡述若干如下：（一）1983年丘成桐教授因為Calabi猜想及普通相對論的正質量猜想的證明，獲得國際數學會議的Fields獎章，這是一個重要的國際數學獎。（二）美國數學會每年選擇一個最活動的專題，作為暑期節目（Summer Institute）的中心課題，集國際上這方面的專家，舉行為期約三週的工作營。1988和1990的題目分別是“多複變函數”和“微分幾何”。這兩科目裏中國數學家是突出的。微分幾何會丘成桐是主持人之一。兩會中作特約演講者有蕭蔭堂、莫毅明、田剛、項武義、李偉光等。中國這方面的人數，超過百人。其中才智人士，即將脫穎而出者，不可勝數。舉莫毅明教授為例，他現在是巴黎大學教授。巴黎是二十世紀大數學家龐加萊（Henri Poincare）的根據地。莫毅明班門弄斧，令人佩服。（三）項武義教授最近解決了球裝（Sphere Packing）的問題。這問題有近四百年的歷史，是一項富有歷史意義的工作。

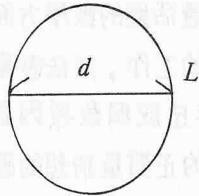
這個單子還可繼續寫下去。近年來中國數學家的貢獻，是不可忽視的。

* 1990年10月26日在台灣成功大學，10月29日，在中興大學演講。本文同時在「科學月刊」刊出。並將收錄至「陳省身文選」（「聯經出版社」出版）。

數學是什麼？數學家究竟做些什麼事？一個嚴格的定義會引我們進入一死胡同。大致說來，數學和其他科學一樣，它的發展基於兩個原因：(一)奇怪的現象；(二)數學結果的應用。一個例子是以下的“幻方”，

4	3	8
9	5	1
2	7	6

其中的九個不同的數目，橫加、直加，和沿兩條對角線的和都是15。可惜幻方只是一個奇蹟，沒有什麼應用。另外的一個奇蹟，圓周長 L 對直徑 d 的比率， $L/d=\pi$ ，是一個常數。這個結果可是重要了！ π 這個數滲透了整個數學！



楊振寧先生講過這樣的故事：我們都知道，德國大數學家高斯(C.F. Gauss, 1777—1855)在讀小學的時候，老師出了一個題目：求 $1+2+3+\dots$ + 某數的和。同學們都用死算，高斯卻獲得一個公式，可以立刻求得答案。方法是命

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n。$$

將各項倒過來寫，則得

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1。$$

由此可見每列兩個數的和都是 $n+1$ 。因有 n 列，得

$$2S = n(n+1) \text{ 即 } S = n(n+1)/2。$$

振寧把這算法講給他的孩子聽，大家都了解和欣賞。但一年後問起這個問題，却都忘了。楊振寧、陳省身同比我們更聰敏的人不同的地方，是我們了解這個推論的美，的力量，聽過之後，永遠不忘。

談到數學的欣賞，讓我再講一個故事，當代有名的數論大家 Atle Selberg (1917—)

曾經說，他喜歡數學的一個動機，是以下的公式：
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots。$$

這個公式實在美極了；單數1, 3, 5, …這樣的組合可以給 π 。對於一個數學家來說，此公式正如一幅美麗的圖畫或風景。凡讀過初等微積分的人大多應碰到這個公式。如果只因爲考試而背誦它，這個人便不必讀數學。

二、數學史上的幾件大事

不管數學是什麼，數學家在繼續推展它的範圍。最奇妙的，是新數學得到不能想像的應用。數學工作的主要目的，是了解新數學的性質，尤其是它與傳統數學不同的地方。結果把奧妙變爲常識，複雜變爲簡單，數學便成爲科學的有力而不可缺少的工具。

茲舉數學在歷史上的若干進展爲例：

(一)一本劃時代的書是歐幾里得(Euclid, 約300 BC)的“幾何原本”。它把空間的幾何性質，從一組公理出發，用邏輯推得。歐書範圍其實不限於幾何。這本書把數學建爲一項系統的學問，不再是一堆彙集的問題。歷史上有一段時間，歐書也用來練習推理，成爲一本通俗的教科書。

(二)歐書討論的範圍，限於平面上的直線、圓周、和空間的相當圖形。等到Descartes(1596—1650)引進解析的方法，便可研究平面上由任意方程

$$F(x, y) = 0$$

所定的曲線。幾何的範圍擴大了！但任意曲線或任意函數的研究要等Newton(1642—1727)和Leibniz(1646—1716)的微積分的發現，才特別有效。這個時期另一個重要的數學家是Fermat(1601—1665)。他同時發現了許多解析幾何和微積分的觀念，可惜他在生前未曾發表。

(三)微積分的一個基本新觀念是無窮：無窮大或無窮小。由無窮便引到極限。澄清這些觀念不是一件容易的事，費了數學家約兩百年的時間。它牽涉到實數系統、拓撲和數學的基礎。一個關鍵的人物是Cantor(1845—1918)。他的點集論獨創新意，高瞻遠矚，為數學立了基礎。

(四)數學上另一個基本概念是群。最早的問題是解代數方程，要把任意方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

的根表為係數的只含根號的函數。要回答這個問題，需要群的觀念。最先認清這個關係的，是法國的年輕數學家Galois(1811—1832)。群的觀念從此深入到每個數學領域。

在幾何方面有變換群。歐氏空間的全體運動組成一個群。其他還有投影變換群，等角變換群等等。這種群是無限的，他的元素組成一個空間。他們都是李群的特例。創始人Lie(1842—1899)是挪威的數學家。李群是數學上一個基本的概念。

有限群的研究是很困難的。要了解它們的結構，數學家把它們分解為單群。但是單群並不“簡單”：有許多極大的有限單群。當代領袖的代數學家說：有限的單群已經完全確定了。可是這個定理的證明，需要二千頁，也還沒有人把它完全寫下來。

(五)上面說過，解析幾何推廣圖形的範圍。最普通的一個情形，是在 n 維空間 R^n 內，討論一組方程式

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, m$$

其中 x_1, \dots, x_n 是 R^n 的坐標。這是一個內容極為豐富的課題。如果 F_i 是多項式，這是代數幾何。高斯當年研究了 $n=3, m=1$ 的情形，即歐氏空間的曲面論。他的一篇論文是微分幾何奠基的文章。他著重於曲面的參數表示。這個想法引到流形的基本觀念，在近代數學占有中心的位置。

流形把空間的觀念擴大了。在微分流形上

可以用微積分的工具，實施種種運算。這個發展使微分幾何成為數學的一個中心領域。

(六)請容許我談一些同我個人工作有關的一個方面，即所謂纖維叢和連絡。我們有種種特殊的空間，如歐氏空間、矢量空間、仿射空間等等。我們也有一般的拓撲空間，前者有深刻的性質，後者富於普遍性。纖維叢是把兩者串連起來的一個觀念。它是一個自然的發展，也十分有用。它有局部的性質和整體的性質。前者容易描寫和度量，後者選出重要的性質。纖維叢的現象出現於數學的各部門，和理論物理。

物理上有四種力：核力、電磁力、引力、和弱力。現在大家公認：這四種力的能都是規範場。纖維叢的連絡是規範場論的數學基礎。

三、當前的數學界

二十世紀數學的一個現象，是職業數學家人數的大量增加。美國幾個學會的全體會員錄列五萬六千多人，其中絕大多數是有博士學位的。

數學成為一個社會現象，大約發生於一百年前。今年德國數學會慶祝成立一百周年。去年則有美國數學會成立百年紀念。國際數學家會議的首次會於1897年在瑞士Zürich舉行，會期三天。第一個演講者是法國的龐加萊，題目是“純分析同數學物理的關係”（龐氏因病未能出席，演講由人代讀）。值得注意的是這題目今天仍適用，但“分析”似應改為“幾何”。國際數學會議每四年舉行一次，今年八月在日本京都。1994年將回到Zürich開會。

另一個現象是計算機的侵入。計算機引發了許多新的課題，如Recursive Functions，如Complexity，如Fractals等等。它對於許多數學工作有用，也使若干問題改觀。但究竟影響有多大，則是一個聚訟的問題。數學天地雖小，也是很熱鬧的。

計算機的立刻的影響，恐怕是數學教育。從前需要學習的某些方法，現在不再需要，至少應該改變。這種討論對於數學的發展是健康的。

第二次世界大戰以後，科學受到重視，數學研究也得到社會的支持。有些人可靠做研究工作。這個情形的一個效果，是使得數學工作者同相類的工作者有相類的待遇，因此能吸收有才能的新人進入工作的行列。

一個發展是研究所的成立。最早而最有名的是Princeton的Institute for Advanced Study。這個故事值得一講！二十年代美國紐約的大百貨公司Macy公司的老板Louis Barmburger決定捐一大筆款辦理科學事業，問計於教育家W. Flexner。F先生的建議說：「你的捐款數目很大，但是不足以辦一個第一流的試驗科學研究所。如果側重數學，則可能是第一流的」。B先生聽了他的話。恰好德國希特勒於1933取得政權，IAS請到愛因斯坦、Hermann Weyl等教授。不出十年，Princeton成了世界數學研究的中心。

IAS的主要節目，是網羅年輕有為的數學家，給他們優良的環境和工作機會。作者第一次在那裏，是1943—45，完成了我一生最重要的工作。此恩令人難忘。以後我還去過三次（短期訪問不計），都給我愉快的回憶。

繼起的研究所有：巴黎的Institut des Hautes Etudes，英國Warwick的Mathematics Institute，日本京都的Mathematical Sciences Research Institute，Bonn的Max Planck Institut，以及巴西，墨西哥等研究所。最近成立的有蘇聯列寧格勒的研究所，和正在計劃中的英國劍橋的牛頓研究所。這些研究所都有著名的常任研究人員，廣泛的節目，也十分歡迎合格的訪問數學家。

講到研究所，自然應提到Berkeley的MSRI，因為我曾經起過若干作用。這是美國國家基金會支持的，是美國第一個政府辦的數

學研究所。在一個民主的國家，這種事要經過長期的醞釀。等到決定舉辦以後，它的地點更是大家爭逐的目標。我同I. Singer及C.C. Moore送進一份計劃書以後，沒有做過任何爭取的努力。我可以想像Berkeley計劃的優點，獲選並非偶然。1982年成立以來，備受好評。

儘管大家鼓吹交流和合作，我相信數學研究主要靠個人。一個人的創見是努力和靈感的結晶，不是同一群人討論的結論。數學是一個廣泛而複雜的學習，自然需要吸收各方面的知識和觀點。但更要緊的要有個人的風格。

數學的研究與其他科學相比，有一個顯著的不同的地方；它是向多方面發展的。當今的物理科學和生物科學往往有幾個主題。但數學的研究方向比較可隨個人自由選擇。所以工作不必集中於幾個大的中心，研究人員可較分散。一個有能力有決心的人，可以隨不同的途徑，完成他的志願。

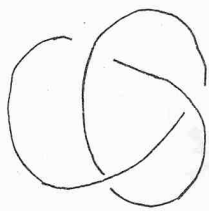
二十世紀是數學的一個黃金時代。

四、純粹的數學與應用數學

數學上一個極大的謎是：為什麼數學會有用？

上面所講的圓周率 π 遍見於數學公式。因為要使每個二次方程式都有解，我們引進複數 $i^2 = -1$ 。沒有複數就沒有電學，就沒有近代文明！

近來一種風氣，是在數學機構上，加“應用”兩字。其實純粹數學與應用數學是很難畫界的。再舉一個例：代數拓撲中有所謂“結”論（knot theory），問空間繩子的結，是否可不經剪斷而解開。例如下圖的梅花結就解不開。這個問題在分子生物學DNA的結構研究中，極為重要。所以生物學家需要學微分幾何與代數拓撲。柏克萊的V. Jones教授因為“結



”論與算子代數的工作，獲國際數學會的1990年 Fields 獎。他引進了結的新的不變式，現稱為 Jones 多項式。

科學的發展需要數學。但是歷史告訴我們，他們所需要的數學，往往為數學家所已發展。這是數學家值得自豪的，也是一件十分神祕的事實。

我相信數學是有內容的，不完全是邏輯。廿世紀數學中的菩薩包括黎曼(Riemann)、龐加萊。大致說來，黎曼把數學建立在流形的觀念上，龐加萊則發展高維的數學。流形不必光滑，非緊緻的流形將有更多幾何性質，若干無限維流形會有美麗的現象，這些都是可以期望的遠景。

兩千年的數學發展是連續的。這個現象當可繼續。不過廿一世紀的數學將是一個新的天地。世變不可知，可引以自慰的是數學是一個堅固的結構。我想有人類就有數學！

五、結 論

中國數學的發展已具有充分的條件，不妨考慮一下當前有些什麼事可做：

(1) 要有信心。千萬把自卑的心理放棄，要

相信中國會產生許多國際第一流的數學家。也沒有理由中國不能產牛頓、高斯級的數學家。

法國文學家 Romain Roland 寫過一本書，記載中古時代德國音樂家在羅馬的故事。羅馬人笑他們，這種野蠻的人，如何懂音樂？沒有多少年德國出了 Bach, Beethoven。我做學生的時候，曾經看見日本人寫的文章，說中國人只能習文史，不能念科學。這種荒謬的說法當時也可言之成理。

中國應建立若干基地，交流仍是必要的，但應求逐漸對等。

(2) 希望社會能認識中國成為數學大國是民族的光榮，而予以鼓勵和支持。例如：不要把數學家看成“怪人”。中國沒有出牛頓、高斯這樣偉大的數學家是社會的、經濟的現象。中國的大數學家，如劉徽、祖沖之、李治等都生逢亂世。我想治世時聰敏人都去求功名做官去了。這情形現在並沒有改變。要提倡數學，必須給數學家適當的社會地位和待遇。

願中國的青年和未來的數學家放大眼光展開壯志，把中國建為數學大國！

(1990年11月於美國加州)

——本文作者為中央研究院院士——