

# 大專聯考數學試題設計不易

石厚高

今年大專聯考自然組數學試題三年級理科數學(微積分、數值方法、矩陣)佔三十分,比例恰如其份。升大學的可以去大學再讀微積分,中學這個階段不需要強調。七月一日考了自然組數學,第二天各大報都是一片叫好之聲。我一拿到試題就作了一遍,有些地方值得商榷。七月十六暑假輔導開始,我要兩班第三類組行將升進高三的學生作了一遍,他們的表現和我的看法十分接近。

填空(A)真正代值去作就很麻煩,一再要看「準大學生」算術的加、減、乘的能力,並沒有多大的意義。本題設計的重點在於餘式定理與綜合除法。參考民國六十四年大專聯考自然組數學試題的

$$\begin{aligned} \text{設 } f(x) &= x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 \\ &\quad - 30x - 11 \end{aligned}$$

試求  $f(7)$ , 利用綜合除法較便捷

$$\text{答: } f(7) = -25$$

同年社會組

$$\text{設 } f(x) = x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 25x^2 + 30x - 6$$

試求  $f(7)$ , 利用綜合除法比較方便

$$\text{答: } f(7) = 8$$

這兩題的設計在層次上是有差距的,自然組的  $f(x)$  缺六次項,而社會組就沒有缺項。就從這一點看來命題人是相當有經驗的,自然組的學生當然應該知道缺項要補零,社會組的學生會綜合除法已經是很不錯的了。這兩題的數據也經過精心設計,會的很快就作出來了,不會作的一個字也寫不出來或者是沒有想到綜合除法的用數值代入,要花很多時間也不一定會作對。相形之下本年同性質的(A)的數據設計就遜色多了。聽說大專聯考命題人都是在半年前就聘定了,所以命題人最好找幾份聯考試題作作,作一份不覺得怎麼樣,作二、三份就有些感

覺了，作上五、六份就功力大進，對中等教材應該熟練多了。因為命題人不是中等學校數學教師，中等教材的「會」與「熟」是兩回事。

填空題的(B)與(C)，考生記不記得重根定理差異很大，原題如下：

2. 設  $P(x)$  為一五次多項式， $P'(x)$  為其導函數， $P(1)=P(2)=P(3)=P'(2)=P'(3)=0$ ， $P'(0)=1$ ，則  $P(0)=$ (B)， $P'(1)=$ (C)。

解：如果想到重根定理，就簡單多了。

$$\begin{aligned} \text{設 } P(x) &= a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ P'(x) &= a[(x-2)^2(x-3)^2 \\ &\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)(2x-5)] \end{aligned}$$

$$P'(0) = a(36+60) = 1, \quad a = 1/96$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2/96$$

$$P(0) = -3/8, \quad P'(1) = 1/24$$

七月二十五日幾個今年畢業數學成績很好的同學回校告訴我，這一題想到了重根定理也不好作，大概是沒有想到  $P'(x)$  的表示法。下面是沒有想到重根定理的解法。

解：設  $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{aligned} \text{得 } P'(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(2ax+b) \\ &\quad + [(x-2)(x-3) + (x-1)(2x-5)] \\ &\quad (ax^2+bx+c) \end{aligned}$$

這個式子並不需要展開，作起來比較方便，這種寫法考生想得到的也不會很多。

故得

$$P'(2) = -(4a+2b+c) = 0$$

$$P'(3) = 9a+3b+c = 0$$

$$P'(0) = -6b+11c = 1$$

解得  $a = 1/96$ ， $b = -5/96$ ， $c = 1/16$ ，代入  $P(x)$  後得

$$P(0) = -3/8, \quad P'(1) = 1/24$$

由於  $a$ ， $b$ ， $c$  數據繁複，這一組三元一次聯立方程式解出來要花多少時間，數播讀者可以作作看。請聯招會統計一下，這題作出來的有多少？兩種方法又各有多少人？如果把它改成設  $P(x)$  為一三次多項式， $P'(x)$  為其導

函數， $P(1)=P(2)=P'(2)=0$ ， $P'(0)=1$ ，

則  $P(0) =$ (B)， $P'(1) =$ (C)

解：設  $P(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$

$$\text{得 } P'(x) = a(x-1)(x-2) + (ax+b)(2x-3)$$

$$P'(2) = 2a+b=0$$

$$P'(0) = 2a-3b=1$$

解得  $a = 1/8$ ， $b = -1/4$  代入  $P(x)$  後得

$$P(0) = -\frac{1}{2}, \quad P'(1) = \frac{1}{8}$$

雖然數據單純多了，還是一樣可以測出程度來。不會作的一個字也寫不出來。若設  $P(x) = a(x-1)(x-2)^2$  就更容易了。至於填空題第 5 題的線性規畫幾乎是兩班都全軍覆沒。

行列式兩題共十分，一題是三階行列式，一題雖然是五階行列式，在高三下才學過，可是老師都教過，運算也不繁複，程度普通的多數學生都應該拿到分數。

本學期高三數學模擬測驗有這樣一題：

把自然數 1，2，3，4，5，6 寫在六張卡片上，從中同時抽取三張，用這三張卡片上的自然數作三個邊，能構成三角形的機率為何？

筆者所教兩班已經畢業的第二類組的班級作對的一班是 18 人，另一班是 11 人，兩班人數各為 56 與 51。它不是一題適合作入學考試或模擬考的題目。 $C(6,3)=20$ ，幾乎是全體都知道的，構成三角形的條件是要測試任二邊之和大於第三邊，可是把它們找出來是要花些時間的。一共有七種，它們是：2，3，4；2，4，5；2，6，5；3，4，5；3，4，6；3，5，6；4，5，6；正確的答案是  $7/20$ 。而以  $3/10$  ( $6/20$ ) 作答的相當不少。

今年大專聯考計算題的第三題也是一樣，不宜作為入學考試的題目，寫寫看

和為 5 點 (1,1,3), (1,2,2)

各有 3 種

和為 10 點 (1,3,6), (1,4,5), (2,3,5)

各有 6 種

(2,2,6),(2,4,4),(3,3,4)

各有 3 種

和為 15 點(3,6,6),(4,5,6),(5,5,5)

各有 3,6,1 種

11 種情況少寫一種就全錯了，這一題現在教的兩班作對的只有 58 名，佔全體人數  $58/111 = 52\%$ ，就和有幾年大專聯考出了些要考生在一個圖形內數數三角形有幾個、三角形有幾類，同樣的沒有意義。也許讀者會說 52% 並不低，對建中學生說來低了些，他們是兩年前經過選擇以第一志願入學的。

數學歸納法這一題也幾乎是全軍覆沒。中學教師都不會意外，在學校的模擬考和其他各種考試，數學歸納法的題目會作的也都不多。它是不是應該出現在升學考試的試題中很值得商榷。它的表達方式不太能為中學生所接受。

總計 100 分裡高二學生可以作的佔 70 分，兩班學生低標準為 31.07、28.68，按 100 分比例放大，各為 44.4、40.97。這種成績對建中學生來說是低了些。因為他們是二年前經過選擇第一志願入學的。

今年的高、低標準為

	自然組	社會組
高標準	46	70
低標準	32	49

和去年的比較一下

	自然組	社會組
高標準	48	49
低標準	33	34

很明顯的發現社會組的有大幅的改進，是歷年

來大專聯考社會組數學最容易的一次，這是個好現象，社會組考生放棄數學的頗不乏人，今年放棄數學的要後悔了。以後社會組數學的教學推動要便利得多。

建中前校長李大祥先生對教育很有理念，是少見的教育家，他在數學科教學研究會上說他努力了十年終於把邏輯從中等學校數學教材裡刪去了，實在讓人佩服。教育部把大學邏輯改成選修，是多年來令人叫好的德政，教育部的措施令人叫好的實在不多，希望把數學歸納法也從中等數學裡刪去。

這是一份很用心的題目，可惜計算繁複也有些不應該出的題目，以致沒有達到考試目標，也就是沒有把考生的程度表現得恰如其份。從自然組的高、低標準看來分數偏低，比去年還要低。根據考生反應，題目不難，可是很難拿到分數。這份題目是不錯的，可惜的是命題人沒有教過中學生，有的題目未能掌握學生程度，有的數據沒有仔細推敲，實在是十分遺憾。民國六十三年大專聯考的數學試題不論自然組或社會組都是用心的試題，用心的試題可不是適合入學考試的試題，那一年的低標準只有個位數字，打破聯考的低標準記錄。我常把它給學生作補充題，反應熱烈。希望以後的聯考試題也用今年這種命題的精神，不用背公式要理解。不過數據請多斟酌。讓考生的程度表現的恰如其份，在校聽講、習題都是自己作的不用看題解的學生能有八十分的成績。一份題目是要澈底作一遍才能知道端詳，略作瀏覽就說是第一流的題目是輕率了些。

——本文作者任教於建國中學——