七十九年度大學入學考試自然組數學試題與教材的探討

賴敦生

壹、前　言

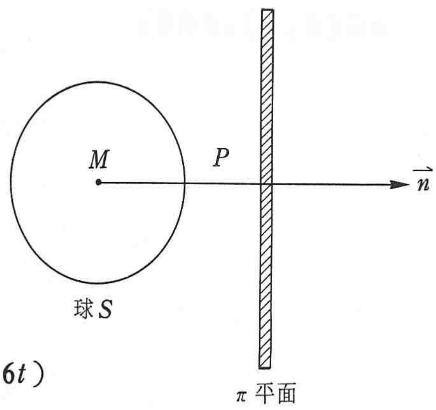
“高中數學”乃為基礎數學之研習，有其特定的範圍和研習目標。大學入學考題牽引着高中數學教學方式和學習態度，是衆所周知的事實。

本文意旨：從考題解法中檢視考生應具知能，與教材之教學目標相互比較，以揭示考題眞相和學習方法間的互動關係，並指出高中數學體系中對數學研習的理念——“功能”表達與“解題”教學的困頓。乞盼領導教學方法的大學入試命題先生們能體會我們的心聲，解除教學的疑惑，提昇教育品質。

貳、考題與教材之探討

第一部份：單一選擇題。（20％）

〔子〕1°＜解＞：$(x+1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z+2)^2=\frac{9}{4}$



球心 $M(-1,-\frac{3}{2},-2)$

平面 π 之法向量 $\vec{n}=(2,3,6)$.

$\overrightarrow{MP} /\!/ \vec{n}$.　　令 $\overrightarrow{MP}=t\,\vec{n}$

$\therefore (a+1,b+\frac{3}{2},c+2)=(2t,3t,6t)$

$P(a,b,c)=(2t-1,3t-\frac{3}{2},6t-2)$ 在球面上。

必　$(2t)^2+(3t)^2+(6t)^2=\frac{9}{4}$　，　$t=\pm\frac{3}{14}$　。

$$(a,b,c)=\left(\frac{-4}{7},\frac{-6}{7},\frac{-5}{7}\right)\text{ or }\left(-\frac{10}{7},\frac{-10}{7},\frac{-23}{7}\right)$$

P至π平面之距離：$\left|\dfrac{2\cdot\frac{-4}{7}+3\cdot\frac{-6}{7}+6\cdot\frac{-5}{7}-7}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}\right|=\dfrac{15}{7}$ ……最小

答：1. (E)　2. (C)　3. (D)　4. (B)　。

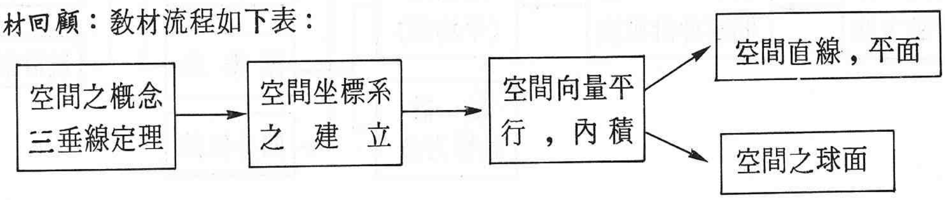
2° 應具知能：1.** $\overrightarrow{MP}$ 向量（半徑）平行π平面法向量之假設。

2.** 方程式解$\Longleftrightarrow$圖形上之點的坐標。

3.** 由參數求得點P之坐標。

4.** 點與平面距離的求法。

3° 教材回顧：教材流程如下表：



1.* 從三垂線定理建立空間坐標系後，強調以空間向量之運算處理空間幾何 ～ 直線、平面、球面、點之互動關係。

2.* 喚起讀者注意“向量”不若往昔自我封閉演算，宜注重實體世界之應用。

4° 考題探討：本題反映考生思考、辨別、演算的活力，理念深及教材核心，是考生熱切期盼的考題。

㈩ 1.° <解>

1.* $\overline{X}=\dfrac{200\times 71+100\times 77}{300}=\dfrac{219}{3}=73$ ……答：(5) 選 (B)

2.* $S_1^2=16=E(X_1^2)-\overline{X}_1^2=E(X_1^2)-71^2$　　$\therefore E(X_1^2)=71^2+16$ 。

$S_2^2=25=E(X_2^2)-\overline{X}_2^2=E(X_2^2)-77^2$　　$\therefore E(X_2^2)=77^2+25$ 。

3.* $S^2=\dfrac{1}{300}\Big[\underbrace{200(16+71^2)}_{\sum_{i=1}^{200}X_{1i}^2}+\underbrace{100(25+77^2)}_{\sum_{i=1}^{100}X_{2i}^2}\Big]-73^2=27$

$$\sum_{i=1}^{300}X_i^2$$

$$E(X^2)-\overline{X}^2=S^2$$

$\therefore S=\sqrt{27}\doteqdot 5.2$ ……答 (6) 選 (E)

2.° 應具知能：

1.* 平均數求解範圍擴充

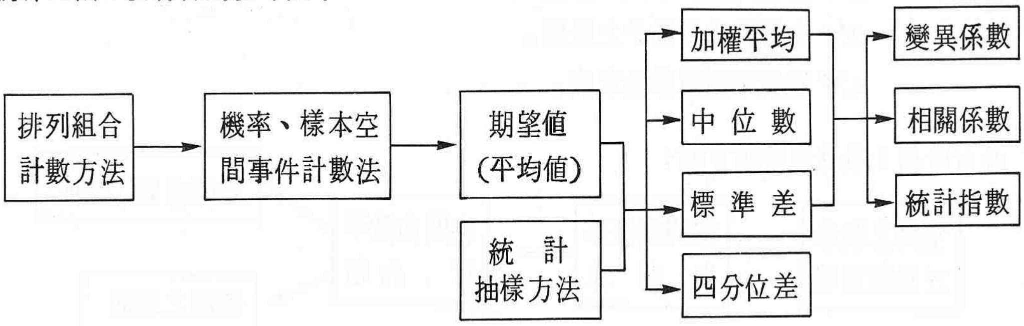
2.* 由 $S_1=\sqrt{E(X_1^2)-\overline{X}_1^{\,2}}$ 求得 $E(X_1^2)$

$S_2=\sqrt{E(X_2^2)-\overline{X}_2^{\,2}}$ $E(X_2^2)$ ＞合併以求 $E(X^2)=\dfrac{200E(X_1^2)+100E(X_2^2)}{300}$

爲 求 $S=\sqrt{E(X^2)-\overline{X}^2}$ 所必須。

3.* 由二組數據個別的標準差合併計算成一大組數據的標準差，其間的演算意義和技巧宜相當熟悉。

3.° 教材回顧：教材佈局參考如下：



1.* 辛勤研習排列組合，原來爲求取事件發生的機率，平均獲益值，數、量的代表值，探究平均品值差，異類數值比較係數，了解社會現象，爲爾後經營謀略的參考依據。

2.* 在此目標的前導下，排列組合演習有其範圍和固定航道，甚爲明朗，認眞勤奮追逐往昔的隨機命題似覺非屬必要，而排列、組合、機率的課外題解從此可以減量教學。此爲時勢所趨，等候證實。

4.° 考題探討：

1.* 本題檢測考生對平均數、標準差原始意義是否深入了解，精通。

2.* 由小組合併成大組合後，追算 $E(X^2)$ 可偵測出優秀的考生。

3.* 反映考生的公式記憶，活用代數演算道理，對有耐心，肯精密思考的考生最爲有利。

第二部份：非選擇題（共佔80分）

一、塡充題

1. 1° ＜解＞

1250	−2790	−3125	707	100	45	−62	3
	3750	2880	−735	−84	48	279	
1250	960	−245	−28	16	93	, 217	

……答：$f(3)=217$

2.° 應具知能：

1.* 若 $f(3)$ 以 $x=3$ 代入原函數之 x，以

$$1250\cdot3^6-2790\cdot3^5-3125\cdot3^4+707\cdot3^3+100\cdot3^2+45\cdot3-62$$

計算求值，則浪費時間，影響別題作答。

2.* 考生需充分的了解餘式定理、綜合除法與函數值的連串意義。

3.° 教材回顧：

- 函數求值
  - 理論值
    - 直接代入 → 尋求多項函數或特殊可計值之函數值。
    - 餘式定理 → 尋求多項函數值的巧妙方法。
  - 近似值
    - 托勒密方法 → 利用平面幾何、差角公式、半角公式、內插法、尋求正弦函數值。
    - 化乘除爲加減 → 將10一再開方，化乘除爲加減尋求對數函數之近似值。
    - 泰勒展開式 → 使用微分法尋求函數值的近似值，此處的函數爲可微分函數。

4.° 考題探討：

1.* 本題向考生宣告：雖是歷年熟悉的題目，知之甚詳，可是臨場的實務計算可否精確演算，不失誤是一大隱憂。

2.* 從此同學們學習教本對常見題型應試著操作，雖是熟悉，但在考場不見得能答對而有成績，精誠篤實是我們今後的學習心態。

3.* 向來依據教本教學常被學生認爲不重要教材而拒收的教學困頓，終因本題出現而解除。

4.* 研習高中數學最精彩，費力的一段——微分的具體應用～（泰勒展開式求函數值的近似值）雖未出題，並非顯示此段教材不重要，仍應重視。

2. 1.° <解>

1.* $\because P(1)=P(2)=P(3)=0$ $\qquad\therefore 1，2，3$ 爲 $P(x)=0$ 之根。

2.* 又 $P'(2)=P(2)=0$， $P'(3)=P(3)=0$． $\quad\therefore 2，3$ 爲重根。

3.* $P(x)$ 爲一五次多項式 $\qquad$ 故可設 $P(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^2\cdot a$。

4.* $P'(x)=a[(x-2)^2(x-3)^2+(x-1)\cdot 2(x-2)(x-3)^2+2(x-1)(x-2)^2(x-3)]$

$P'(0)=36a+36a+24a=1$， $\qquad\therefore a=\dfrac{1}{96}$。

5.* $P(x)=\dfrac{1}{96}(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$

6.* $P(0)=\dfrac{1}{96}\cdot(-1)\cdot 4\cdot 9=\dfrac{-3}{8}$ ……(B) 答。

$P'(1)=4\cdot\dfrac{1}{96}=\dfrac{1}{24}$ ……(C) 答。

2.° 應具知能：下列基礎知識爲解題所必備。

1* 多項式方程式的根與多項式一次因式間的互述。

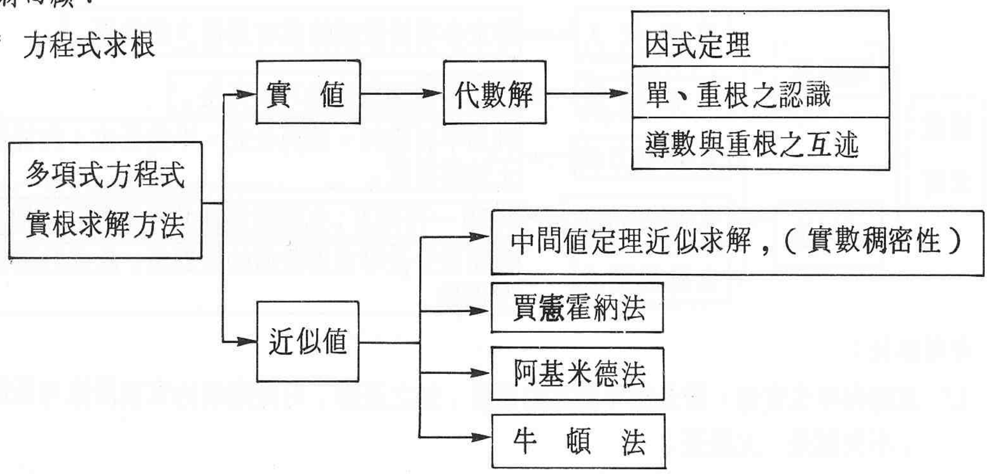
2* 重根定理與導函數的計算。

3* 根的個數與多項式的次數。

4* 參數設計。

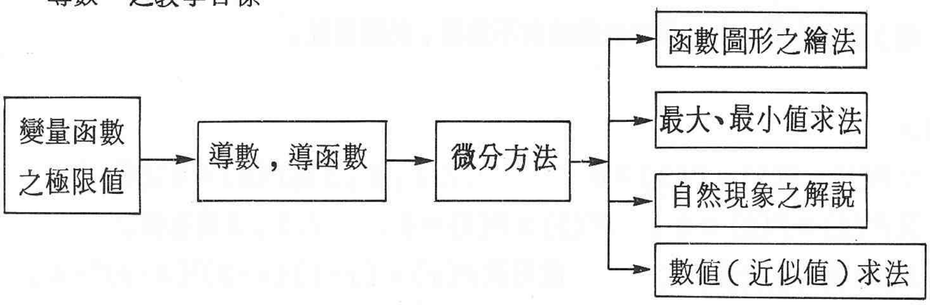
3.° 教材回顧：

1.* 方程式求根



2.* 高一數學重視實根求解技巧，高三數學則強調方程式根之近似值的求法，它反映微分導數的功能。

3.* “導數”之教學目標



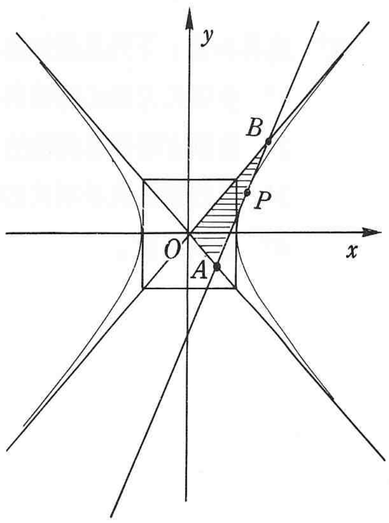
4.* 導數的源起、功能、教本描述相當細膩，讀者當可體會研習數學除了玩賞造題、解題的技巧外，尚有其他應用的崇高價值深值注目。

4.° 考題探討：

1.* 方程式實根求解，嵌入因式定理，導數與重根的深意，其間往返的調動，僅止於演算運作，學理上並未進入導數教學的崇高目標區間——功能運用。

2.* 今後學習的啓示：考題出處未必是教材的熱門航道；可能在基礎理念上遊走，跳動，研習數學當理解教材申述結構，面面俱到，不得偏頗。

3. 1.° ＜解＞



1.* 切點 $P(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ 在 I 象限，

$\because a$，b 均正，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。

2.* 過 P 之切線方程式：

$$\frac{1}{a^2}(a\sec\alpha)x-\frac{1}{b^2}(b\tan\alpha)y=1。$$

$$斜率：m=\frac{\frac{\sec\alpha}{a}}{\frac{\tan\alpha}{b}}=\frac{b\sec\alpha}{a\tan\alpha}=\frac{b}{a\sin\alpha}\quad\cdots\cdots(D)答。$$

3.* 切線與漸近線之交點：

$$\left\{\begin{array}{l} b(\sec\alpha)x+a(\tan\alpha)y=ab \\ bx+ay=0 \end{array}\right. > \text{交點}A\left(\frac{a}{\sec\alpha+\tan\alpha}, \frac{b}{\sec\alpha+\tan\alpha}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} b(\sec\alpha)x-a(\tan\alpha)y=ab \\ bx-ay=0 \end{array}\right. > \text{交點}B\left(\frac{a}{\tan\alpha-\sec\alpha}, \frac{b}{\tan\alpha-\sec\alpha}\right)$$

4.* 所求$\triangle OAB$之面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{\sec\alpha+\tan\alpha} & \frac{b}{\sec\alpha+\tan\alpha} & 1 \\ \frac{a}{\tan\alpha-\sec\alpha} & \frac{b}{\tan\alpha-\sec\alpha} & 1 \end{array}\right|=ab$ ……(E)答。

2.° 應具知能：

1.* 已知切點求錐線之切線方程式。

2.* 三角恆等式之計算。

3.* 聯立方程式求公解 ～ 即求二圖形之交點座標。

4.* 平面上已知三點座標求三角形面積。

3.° 教材回顧：

1.* 已知切點坐標(x_0, y_0)，雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$之切線方程式：$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

收編爲“理科數學”教材，用意顯然是突顯微分的功用。

2.*“切線與雙曲線之二漸近線相交圍成一三角形，其面積爲定值～ ab ”。

本是雙曲線的重要性質，於基礎數學第三册錐線部份有專節介紹。

3.* 錐線之教學目的：結合“代數”與“幾何”之綜合述說，讓讀者明白學習代數的技能去從事幾何圖形的解說，兩者相輔相成，締造數學的美感。

4.° 考題探討：

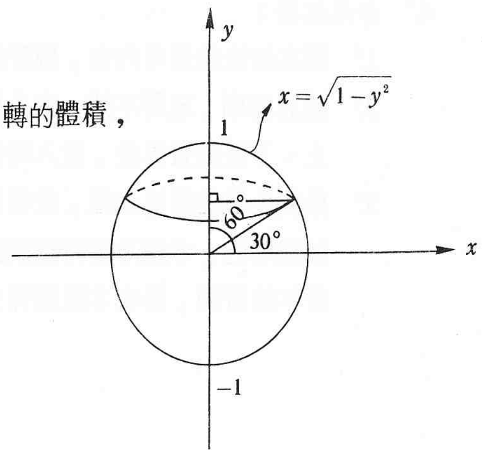
1.* 本題測試：雙曲線上的點坐標可借用三角函數爲參數來表示，做爲高中生是否知悉？而聯立方程式代數解得之公解竟是二圖形交點坐標，透過三角恆等式技術性演算可求得三角形面積，均爲檢測學生程度差異的良好題目。

2.* 這是一道通泛的考題，沒有神秘、詭異的特色。然則從熟識至現場答對得分尚有一段很大的距離，給我們的啓示是：爲學與習作絕應踏實！

4. 1.° <解>

1.* 選擇坐標系：令此球帽爲 $x=\sqrt{1-y^2}$ 繞 y 軸旋轉的體積，

其中 $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.



2.* 使用積分：

$$\text{球帽體積}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi x^2dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(1-y^2)dy$$

$$=\pi\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{24}\pi$$

3.* 所求$=\dfrac{\text{球帽體積}}{\text{球全體積}}=\dfrac{\frac{5}{24}\pi}{\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3}=\dfrac{5}{32}$ ……… (F) 答。

2.° 應具知能：

1.* 坐標系選擇。

2.* 選擇圖形為函數圖形以備積分。

3.* 旋轉體積之意義。

4.* 積分之上限、下限如何定奪。

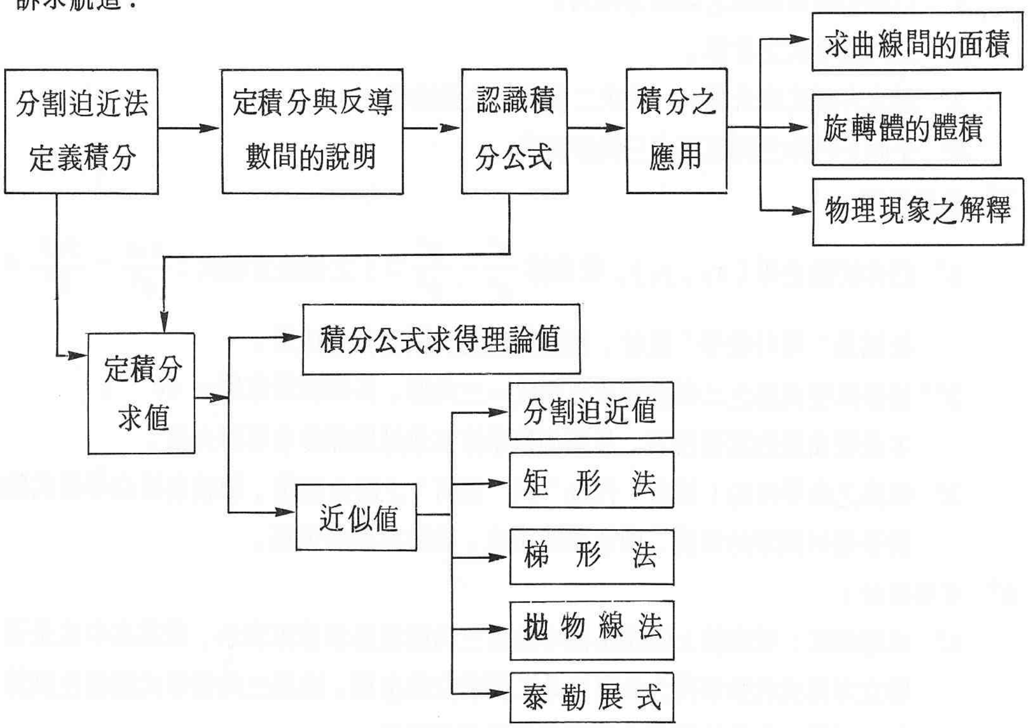
5.* 積分術。

6.* 定積分求值。

3.° 教材回顧：

1.* 追述面積求法：編者(教本)由分割結合法(曹冲秤象)，分割迫近法相互比擬，了解面積求法的意念，從此導出定積分的實體意義，功能發展。

2.* 訴求航道：



3.* 廣泛的積分應用被“高中數學”界定範圍如上表，從積分之應用與定積分求值的認知，“劇本”編寫眞非易事，衆所皆知。

4.° 考題探討：

1.* 饒富趣味的思考內容，機警的演算運作是本題的特色。

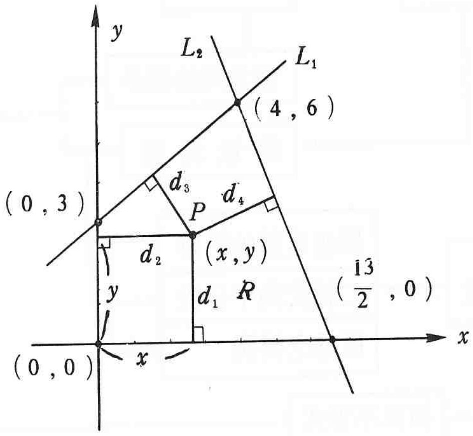
2.* 題意清晰，理解不難，進入思索航道求解卻不易，如圓方程式轉述為函數，建立定積分上、下限煞費思量，投入時間思考解析，愼防影響其他考題作答而減少得分。

3.* 微積分學的廣泛知識，使我們在高三一年投入相當可觀的時間、精力從事升學準備是可以理解的。本題乃旋轉體積認知的測試，出現在教材熱門精華區，是大家熟知的原理，多年的苦練，終在本題獲得公平的回報！

5.1°<解>

1.* 由兩點式求得直線 L_1 ： $3x-4y+12=0$

L_2 ： $12x+5y-78=0$



2.* 令 $P(x, y)$ 則

$$d_1+d_2+d_3+d_4=y+x+\frac{3x-4y+12}{5}+\left(-\frac{12x-5y+78}{13}\right)$$

P與原點在 L_2 同側，故爲負值

屬於 $15x+5y-78<0$ 區域之點

P與原點在 L_1 同側，故爲正值

屬於 $3x-4y+12>0$ 區域之點

$$=\frac{2}{65}(22x-6y+273)$$

1.** 當 $P(x, y)$ 爲 $(\frac{13}{2}, 0)$ 時上述有最大值 $\frac{2}{65}(22\cdot\frac{13}{2}-0+273)=\frac{64}{5}$ ……(G)答。

2.** 當 $P(x, y)$ 爲 $(0, 3)$ 時上述有最小值 $\frac{2}{65}(22\cdot 0-6\cdot 3+273)=\frac{102}{13}$ ……(H)答。

2° 應具知能：

1.* 直線方程式求解。

2.* 點至直線距離。

3.* $ax+by+c>0$ 所表區域的辨別。

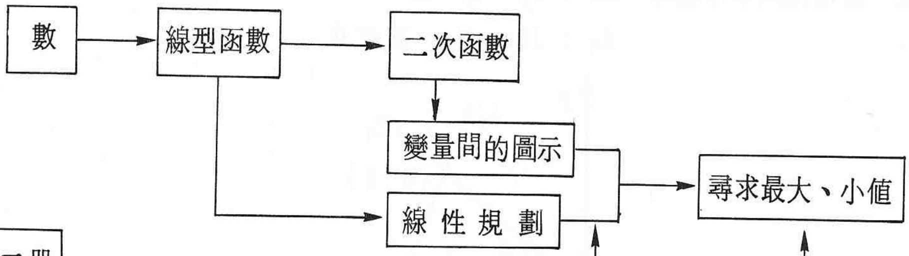
4.* 邊界點坐標與目標式最大、最小值的研判。

3° 教材回顧：

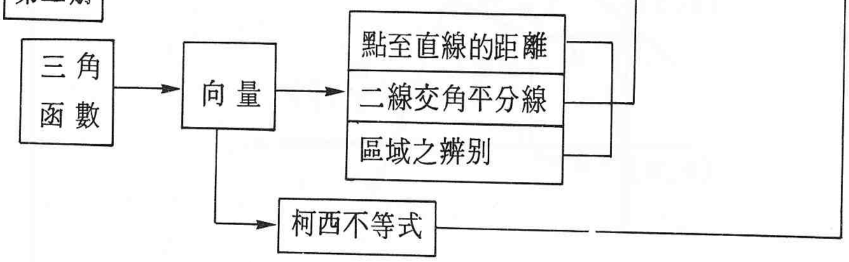
本題爲跨册考題，需有線性規劃、點至直線距離的理念方能求解。

教材編寫歷程爲：

1.* 第一冊



2.* 第二冊



3.* 三角、向量在此表現“工具演算”的角色。因此，類如往昔對“三角”或“向量”內在題庫超量演習眞有必要？值得省思！

4.° 考題探討：

1.* 尋求最大、最小值之思考領域爲：

1.** 算術平均≥幾何平均。

2.** 柯西不等式。

3.** 線性規劃。

4.** 二次函數配方。

5.** 微分功能之應用～遞增、減函數的探索。

選擇線性規劃進入思考解答，是認知應用的一大考驗。

2.* 本題出現在教材主航道的終端，此處滙集前後兩册描述的重重網路，讓考生探索，意趣盎然，頗爲“業界”稱許。

3.* 高中數學習題考題若能在教材主航道上設計命題，很明顯得能激發後起學生思考的興趣，減輕單元題庫沉重的負擔，研習數學的風氣自然蓬勃的發展而不可限量。

6. 1.° <解>　（略）

(I) 答：20。　　(J) 答：112。

2.° 應具知能：

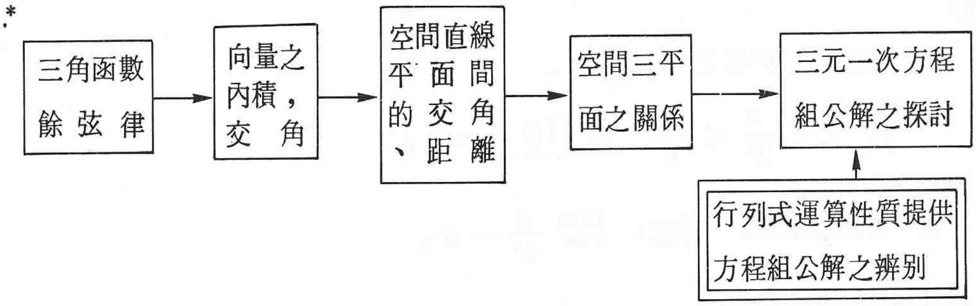
1.* 三階行列式直接計算知識。

2.* 行列式運算性質之靈活運用。

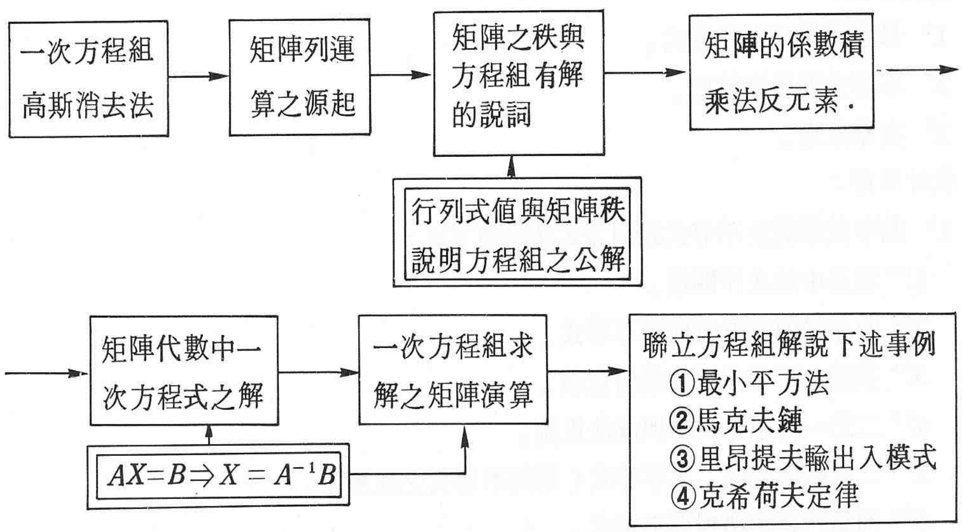
3.° 教材回顧：

在此特意的歸納“高中數學教材”教學“行列式”之出處和目標。

1.*



2.*



3.* 高中數學教科書筆下的行列式教學目標為：

1.** 方程組有無公解的辨識。

2.** 矩陣代數中一次方程式有解時，矩陣乘法反元素之取得由行列式計值完成。

4.° 考題探討：

1.* 艱難的考題容易造成考生演算失常，喪失入學考試鑑別優秀才子的意義。本題運算結構簡單，使考生情緒穩定從容作答，表現實力，命題先生用心良苦，誠可體會。

2.* 現代高中數學體系中的行列式所扮演的角色，功能已如上述，不若往昔盛行，傳統的行列式題庫卻擁有豐富的習題，如果是“解題”教學，我們得懷抱傳統題庫加深練習，如果是功能探討，行列式題庫可以裁減，傳統與現代的取捨是我們“業界”教學的「茫」點，急待大學入學考試命題先生的定奪。

二、

1.° ＜證明＞

(I) 1.* $n=4$ 時 $4^2 \leqslant 2^4$ 成立。

2.* 設 $n=k$ 時成立，即 $k^2 \leqslant 2^k$（$k \geqslant 4$）

3.* $2^{k+1}=2^k \cdot 2 \geqslant \underbrace{k^2 \cdot 2 \geqslant (k+1)^2}_{**}$，即 $n=k+1$ 時原式亦成立。

說明：**

$$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2 \geqslant 0 \quad 但 \quad k \geqslant 4$$

$$\therefore 2k^2 \geqslant (k+1)^2$$

由數學歸納法知：對所有大於 3 之自然數 n，$n^2 \leqslant 2^n$ 均成立。

(II)

1.* 承(I)，$n^2 \leqslant 2^n$，$n \geqslant 4$．

$$\therefore \quad 0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n} \quad 而 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{。}$$

2.* 由夾擊原理： 得證：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$ 。

2.° 應具知能：

1.* 數學歸納法書寫款式。

2.* 不等式證明的技巧。

3.* 夾擊原理。

3.° 教材回顧：

1.* 高中數學關於不等式證明方式探討如下述：

1.** 數系中的次序關係。

2.** 數學歸納法證明絕對不等式。

3.** 數線上不等式解的幾何意義。

4.** 二元一次不等式解與線性規劃。

5.** 二次函數圖解二次不等式（絕對不等式之理解）。

6.** 向量內積說明柯西不等式。

7.** 算術平均≥幾何平均。

8.** 三角不等式。

◎ 9.** 遞增函數、遞減函數證明絕對不等式。

（（由微分側寫）證明對數函數與多項函數間的不等關係。
如： $x > 0$， 求證：$\lim(1+x) < x$ 成立。）

註：◎ 9** 乃是學習的最高點。

2.* 夾擊原理：（出現在教本理科數學上冊、p.164. EX：3－2）
學習本意為尋求區域面積，落實定積分的實質意義。
如：分割逼近法求定積分的來歷 ～ 夾擊原理的用途顯示

$$\underset{\text{上矩形面積和}}{\underbrace{L_n}} \leqslant R\text{區域面積} \leqslant \underset{\text{下矩形面積和}}{\underbrace{U_n}} . \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \underset{\text{定積分}}{\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}}$$

$$\boxed{R\text{區域面積}}$$

3.* 關於數列、級數、極限為高中數學所述及者如下：

1.** 無窮等比級數證實循環小數為有理數。

如：$0.333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots = \dfrac{0.3}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{1}{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

$(-1<r<1)$

2.** 函數極限介說導數（微分）的定義。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$ ……函數在 $x=a$ 處的導數。

3.** 無窮數列極限寫出定積分：$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b f(x)\,dx$。

4.** 如果堅持此等狹窄的教學範圍，是沒有能力解答傳統數列、極限題庫的考題。

4.° 考題探討：

1.* 以數學歸納法證明不等式，夾擊原理求極限，前後相互運用的解題策略，高中生相當純熟，從容思考，作答，安全得分無可憂慮。

2.* 本題雖未切中理科數學教材核心，但充分反映基礎數學解題的藝能，爲學宜廣泛，踏實，前後互用，方能應對隨機抽試而不致失誤累累。

三 1.° ＜解＞

1.* 和爲5點：(1，1，3)，(1，2，2)，機會個數 $\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=6$。

和爲10點：(1,3,6),(1,4,5),(2,2,6),(2,3,5),(2,4,4),(3,3,4)

機會個數：$3!+3!+\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=27$。

和爲15點：(3,6,6),(4,5,6),(5,5,5)，

機會個數：$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$。

2.* 所求機率 $=\frac{6+27+10}{6^3}=\frac{43}{216}$ ……答。

2.° 應具知能：

1.* 三粒骰子點數和爲5的倍數，其出現狀況的基本常識應熟知。

2.* 機會個數統計應抓緊。

3.° 教材回顧：

機率之教學目的，如第一部份選擇題第五題所述，此次不再重複。

4.° 考題探討：

1.* 點數和爲5的倍數，分析狀況得相當嚴密、機警，求取樣本空間、事件的元素(機會)個數尤應謹愼計算，方能得解，否則前功盡棄。

2.* 據聞，計算證明題書寫過程採取分段給分，是以思考過程得盡力書寫以利積分，本題若不喪失信心，至少樣本空間元素個數應可正確取得，5的倍數之狀況數亦能分析得出，機率這一考題應不致完全失分。

3.* 本題不是特異的機率問題，平常的認知即可進入精密的思考，求解，此種出題的模式，改變了今後學子的學習心態，對機率習題不再逃避而熱心求解。

四 1.° ＜解＞

1.* 由公式解 $x^2-(2\cos\alpha)x+1=0$ 之根得 $x=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$。

2.* 設上式之根 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$。

$$\because z^{2n}-(2\cos n\alpha)z^n+1$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n}-(2\cos n\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+1$$
$$=\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha-2\cos n\alpha(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)+1$$
$$=\cos 2n\alpha-2\cos^2 n\alpha+i(\sin 2n\alpha-2\cos n\alpha\sin n\alpha)+1$$
$$=\cos 2n\alpha-2\cdot\frac{1+\cos 2n\alpha}{2}+i(\sin 2n\alpha-\sin 2n\alpha)+1=0$$

故不論 n 爲任何自然數，z 爲方程式 $x^{2n}-(2\cos n\alpha)x^n+1=0$ 之一根。

3.* 若 $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$ 同理可證爲 $x^{2n}-(2\cos n\alpha)x^n+1=0$ 之一根。

合 1*，2*，3*， 本題得證。

2.° 應具知能：

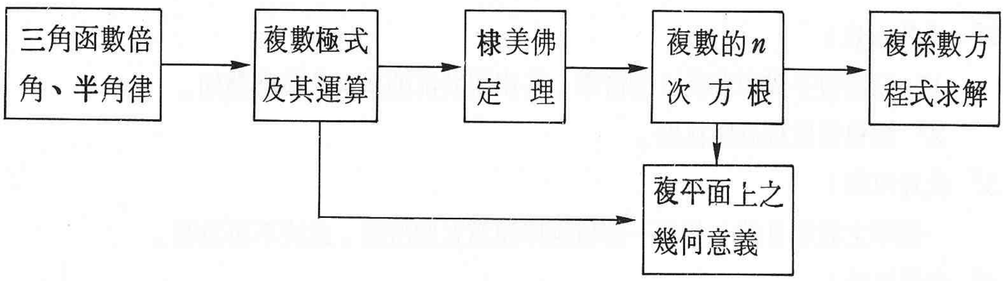
1.* 複數之極式、棣美佛定理。

2.* 三角函數之半角、倍角定律之恆等演算。

3.* $ax^2+bx+c=0$ 二次方程式之二根爲 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3.° 教材回顧：高中數學關於"複數"教學流程如下述。

1.* 教學流程與目標



2.* 高中數學修習複數的意義：使用棣美佛定理，理解複數的 n 次方根依舊爲複數，與實數的意義不同。據此印證：數的最大範圍 ～ 複數系。

4.° 考題探討：

1.* 本題測試考生的膽識，能以 $z=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$ 表出已知方程式之根，再依題意證明另一 $2n$ 次方程式的根，能夠靈活運用棣莫夫定理、倍角、半角定律而完整無缺答對考題的考生，可以肯定他對基礎數學認知相當深入與可靠。

2.* 平時學習不忽視計算證明書寫程式的考生，此時可以免除憂慮難決的煩腦。

叁、結　語

高中數學體系清晰的理念，使我們領會數學是一種語言，視爲現象解說的工具，研習教材的佈局，更能體認功能表達的苦心，此種預設的教材結構與往昔“題庫”演練教學是有差異，今後的教學方向正期待全體“業界”蔵定。

今年大學入學考試自然組數學考題就能針對教材宗旨充分發揮，雖非完全在教材主航道上的精彩目標區域內命題，但也堅守教本範圍譜寫。而尋常熟識的考題，80分鐘內，檢測優秀考生的自然機智、專修能力，功效卓著，務實教學深刻之啓示令人欽佩。

“高中數學”提供我們數學源起的知識，描述現象的工具，更開拓我們讀者研究的知能，所以研習數學宜全盤認知，演練尤須務實，不得側重部份精彩結局的領受，如此面對考題，坦然作答，顯示能力，成就非凡，乃理所當然。

——本文作者任教於建國中學——