上期徵答問題解答

14201「n維方體上移石子」

優勝名單：

優良：胡豐榮（內灣國小）

參考答案（張鎮華提供）

這個題目源自金芳蓉的文章：

Fan R. K. Chung, "Pebbling in Hypergraphs", SIAM J. Disc. Math. Vol.2, No.4, pp.467－472, November 1989.

以下是該文的解答，用的方法是數學歸納法，主要的精神是「要證明某一命題，不如證明一個更難的命題」。

定理：若v是n維方體上某一頂點，則下列敘述成立：

(甲) 若n維方體的頂點上共有2^n個石頭，則有某種移法使v點最後至少有一石頭。

(乙) 若n維方體有q個頂點其上所放的石頭數均爲奇數，而且所有頂點的石頭總數超過$2^{n+1}-q$，則有某種移法使v最後有兩個石頭

證明：$n=0$時定理顯然成立。假設$n'<n$時定理成立。將n維方體分成兩個$n-1$維方體M_1和M_2，其中v在M_1上，v'爲M_2上和v相鄰的頂點。值得注意的是，M_1和M_2的頂點成一一對應，對應的頂點兩兩相鄰。假設M_i有p_i顆石頭，而且有q_i個頂點各有奇數個石頭，$i=1, 2$。

若n維方體有$p\geq 2^n$顆石頭，我們首先來證明(甲)成立，若$p_1\geq 2^{n-1}$，則歸納法假設，在M_1中有一種移法可使v有一顆石頭。若$p_1<2^{n-1}$，分兩種情況討論。

(甲1) $q_2>p_1$。因爲$p_2=p-p_1>2^n-q_2$，由歸納法將(乙)應用到M_2，有一種移法可使v'有兩顆石頭，再移一次，則v有一顆石頭。

(甲2) $q_2\leq p_1$。將M_2頂點上的石頭兩兩利用移動法則，每次去一顆，另一顆移到M_1相鄰的頂點上，結果M_1有$p_1+(p_2-q_2)/2\geq p_1+(p_2-p_1)/2=(p_1+p_2)/2\geq 2^{n-1}$顆石頭，由歸納法將(甲)應用到$M_1$，則有一種移法使$v$最後有一顆石頭。

綜合上述各情況，(甲)成立。

再來證明(乙)成立。若n維方體有$p=p_1+p_2>2^{n+1}-q_1-q_2$顆石頭，我們分下列三種情況來證明(乙)。

(乙1) $p_1>2^n-q_1$。則由歸納法將(乙)應用到M_1，有一種移法使v最後有兩顆石頭。

(乙2) $2^n-q_1\geq p_1\geq 2^{n-1}$。因爲$p_1\geq 2^{n-1}$，由歸納法將(甲)應用到$M_1$上，可以移動$M_1$的石頭使$v$有一顆石頭，又因爲$p_2=p-p_1>2^{n+1}-q_1-q_2-p_1\geq 2^n-q_2$，由歸納法將(乙)應用到$M_2$，可以移動$M_2$的石頭使$v'$有兩顆石頭，再將這兩顆移動，其中一顆消失，一顆到$v$上，最後$v$有兩顆石頭。

(乙3) $p_1<2^{n-1}$。對任何滿足$p_2\geq q_2+2t$的整數t，可以將M_2上的$2t$顆石頭移動，t顆消失，t顆移到M_1上，而M_2剩下p_2-2t顆石頭。因爲$q_2\leq 2^{n-1}$，所以$p_2>2^{n+1}-q-p_1=(2^n-q_2)+(2^n-q_1-p_1)\geq q_2+(2^n-q_1-p_1)$。所以可以取$t=2^{n-1}-\lceil(q_1+p_1)/2\rceil$，而將$t$顆石頭移到$M_1$上，此時$M_1$有$p_1+2^{n-1}-\lceil(q_1+p_1)/2\rceil=2^{n-1}+\lfloor(p_1-q_1)/2\rfloor\geq 2^{n-1}$顆石頭，而$M_2$剩下$p_2-2t\geq p_2-2^n+q_1+p_1\geq 2^n-q_2$顆石頭，由歸納法假設，我們可以移動$M_1$的石頭使$v$有一石頭，也可以移動$M_2$的石頭，使$v'$有兩顆石頭，這兩顆石頭再移動一次，可能$v$再多出一顆石頭。到此，定理證明完畢。