KNUTH 數

張鎮華

交大應用數學所在徐兄掌門時立下一個傳統，離散組的學生剛考取，報到之後，立刻就會被「征召」，在炎炎夏日展開讀書會。現在徐兄雖然高遷資訊所，優良傳統依舊。今年夏天同學們閱讀的是Graham，Knuth和Patashnik合著的Concrete Mathematics。一書九章，每個星期五由某一人主講一章。

夏日炎炎正好眠，讀書苦也！心得交換，偶有小發現，樂哉！下面就請大家分享本人一點小小發現。

問　題

話說陳生講到第三章第78頁時，討論到如下的Knuth數(列)：

$$\begin{cases} K_0 = 1 \\ K_{n+1} = 1+\min\{2K_{\lfloor n/2\rfloor}, 3K_{\lfloor n/3\rfloor}\}, \end{cases}$$

當 $n \geqslant 0$。

心中正自疑惑著：這個數列要怎樣寫成 n 的公式？也有人問出了我心中的話。來不及思考，且讓我們隨著主講者上一段課吧。

這之前，我來複習一下前面提過的事。首先，$\lfloor x\rfloor$ 是所謂的地板(floor)函數，也有人稱之爲高斯函數，用 $[x]$ 表示。但不管那種說法，$\lfloor x\rfloor$ 代表的是「不超過 x 的最大整數」，也就是說，$\lfloor x\rfloor$ 是滿足下列的唯一整數

(1)　$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$　。

對於特殊的 x，我們需要知道比(1)式更好一點的不等式。假設 n 是整數，k 是正整數，利用除法可得

$$n = qk + r \quad 其中\ 0 \leq r \leq k-1$$

此時，$\lfloor n/k\rfloor = q = n/k - r/k \geqslant n/k - (k-1)/k$，所以

(2)　$n/k \leq \lfloor n/k\rfloor + (k-1)/k$　。

(2)式中的 $(k-1)/k$ 比(1)式中的 1 小，這就是我所謂(2)式比(1)式好的意思。

好了，現在可以開始上課。

首先，爲了對Knuth數有一點粗略的瞭解，我們要算幾個數看看，列個表參考如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_n	1	3	3	4	7	7	7	9	9	10

算得很辛苦，暫時休息一下，看看 K_n，嗯，看起來我們可以相信

(3)　$K_n \geqslant n$　對任何 $n \geqslant 0$ 恒成立。

讓我們試著用數學歸納法來證明(3)。$n=0$ 時，$K_0 = 1 \geqslant 0 = n$ 成立。假設(3)式對所有 $n' \leqslant n$ 均成立，由Knuth數的定義知

$$K_{n+1} = 1+\min\{2K_{\lfloor n/2\rfloor}, 3K_{\lfloor n/3\rfloor}\},$$

其中 $K_{\lfloor n/2\rfloor} \geqslant \lfloor n/2\rfloor$ 和 $K_{\lfloor n/3\rfloor} \geqslant \lfloor n/3\rfloor$ 由歸納法假設得知，所以

$$K_{n+1} \geqslant 1+\min\{2\lfloor n/2\rfloor, 3\lfloor n/3\rfloor\}。$$

糟的是，並不保證 $2\lfloor n/2\rfloor \geqslant n$，$3\lfloor n/3\rfloor \geqslant n$（參見(2)式），事實上當 n 是奇數時，$2\lfloor n/2\rfloor = n-1$，當 n 不是3的倍數時，$3\lfloor n/3\rfloor = n-1$ 或 $n-2$。…… 唉！可嘆，我們的歸納法就證不下去了。

絕望嗎？倒也不必，這門不開那門開，總是有辦法的。而且，數學上的怪事往往是這樣的，當你證明一件事情不成功時，試著去證一件較困難的事，反而較容易證明。不信的話，讓我們來證下面的式子：

(4) $K_n \geqslant n+1$ 對任何 $n \geqslant 0$ 均成立。

$n=0$ 時 $K_0 = 1 = 0+1 = n+1$，(4)式顯然成立。假設(4)式對所有 $n' < n$ 時均成立，因此

(4.1) $K_{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \geqslant \lfloor (n-1)/2\rfloor + 1 \geqslant n/2$

且

(4.2) $K_{\lfloor (n-1)/3\rfloor} \geqslant \lfloor (n-1)/3\rfloor + 1 \geqslant n/3$,

上兩式中，我們都用了(2)式。再由Knuth 數的定義，可知道

(4.3) $K_n = 1+\min\{2K_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}, 3K_{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\} \geqslant n+1$,

由數學歸納法，(4)式得證。

(4)式一旦得證，(3)式自然成立，驗證了我們所說的一個事實，較難的事反而容易證。

講者調轉話題，繼續未完的章節，而我心中的疑惑仍在，看官們，你們看該怎麼辦才好呢？且聽我道分明。

實　驗

打從小時候開始，物理化學課都有實驗，就是不曾聽說數學上實驗課，可是經驗告訴我們，某種程度的數學實驗確是有助於一般公式或抽象理論的推導，所以很多時候，在進入一個全新的問題之初，為了熱身，總不自盡的做些實驗幫幫忙，這一次也不例外，提筆再算一些 K_n 值，可是人算不如電腦算，乾脆寫了一個簡單的BASIC 程式，兩分鐘內，算了一大堆 K_n 的值如下表：

n	$K(n)$	$K(n)-n$	n	$K(n)$	$K(n)-n$
0	1	1	33	39	6
1	3	2	34	39	5
2	3	1	35	39	4
3	4	1	36	39	3
4	7	3	37	39	2
5	7	2	38	39	1
6	7	1	39	40	1
7	9	2	40	43	3
8	9	1	41	43	2
9	10	1	42	43	1
10	13	3	43	45	2
11	13	2	44	45	1
12	13	1	45	46	1
13	15	2	46	55	9
14	15	1	47	55	8
15	19	4	48	55	7
16	19	3	49	55	6
17	19	2	50	55	5
18	19	1	51	55	4
19	21	2	52	55	3
20	21	1	53	55	2
21	22	1	54	55	1
22	27	5	55	57	2
23	27	4	56	57	1
24	27	3	57	58	1
25	27	2	58	63	5
26	27	1	59	63	4
27	28	1	60	63	3
28	31	3	61	63	2
29	31	2	62	63	1
30	31	1	63	64	1
31	39	8	64	67	3
32	39	7	65	67	2

n	$K(n)$	$K(n)-n$	n	$K(n)$	$K(n)-n$
66	67	1	83	85	2
67	79	12	84	85	1
68	79	11	85	87	2
69	79	10	86	87	1
70	79	9	87	91	4
71	79	8	88	91	3
72	79	7	89	91	2
73	79	6	90	91	1
74	79	5	91	93	2
75	79	4	92	93	1
76	79	3	93	94	1
77	79	2	94	111	17
78	79	1	95	111	16
79	81	2	96	111	15
80	81	1	97	111	14
81	82	1	98	111	13
82	85	3	99	111	12

這個表其實是修正程式以後印出來的表，主要是有n，K_n及K_n-n三種值。

有了數據，再來就是仔細觀察。首先，我們一眼就看到的是，K_n-n是由一串串長成k，$k-1,\cdots,2,1$的等差數列合成的。舉例來說，當n由31變到38時，K_n-n也由8下降到1。換個角度看，這也表示$K_n=39$對$31\leqslant n\leqslant 38$均成立。

寫時快，看時慢，反正是經過一番觀察之後，終於有了初步的實驗結果。

(E1) 存在遞增數列$-1=a_{-1}<0=a_0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ 使得對任何非負整數n均有$K_n=1+a_i$，其中$a_{i-1}<n\leqslant a_i$。

從實驗的資料，我們列出一些a_i的值如下：

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	-1	0	2	3	6	8	9	12	14	18

i	9	10	11	12	13	14
a_i	20	21	26	27	30	38

因爲電腦的快速動作，加上自己無計可施，就盡情的讓它去計算，n到幾千，也都如(E1)的結果。一方面，根據電腦實驗的守則，實驗到此已經不會有新東西出現，就該停止；而且女兒們的溜冰課時間已到，只好打道回府。

剩下的問題是，如何去證明(E1)？從表中不容易看出$\{a_i\}_{i=-1}^{\infty}$長得如何，要怎樣去描述它？

套句馬蓋仙的話，其餘的就靠我們發揮想像力了。

理　論

上窮碧落下黃泉，轉了幾百轉，最後又轉回(4)式的證明，哈！答案就在那裏。首先，讓我們來看看有那些$K_n=n+1$，也就是前述的a_i到底長成如何？

(5) $K_n=n+1$若且唯若 (甲) $K_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}=\lfloor (n-1)/2\rfloor+1=n/2$，或

(乙) $K_{\lfloor (n-1)/3\rfloor}=\lfloor (n-1)/3\rfloor+1=n/3$。

(5)式對的原因藏在(4)式證明中的(4.1)，(4.2)，(4.3)，理由是說，$K_n=n+1$表示(4.3)中的不等號是等號，要(4.3)的不等號是等號，唯有(4.1)中的兩個不等號是等號，這就是(5)式中的(甲)條件，或者是(4.2)中的兩個不等號是等號，也就是(5)式中的(乙)條件。這證明了(5)成立。

由(5)，我們得知將某個滿足$K_m=m+1$的m加1再乘以2或3，就會得到另一個滿足$K_n=n+1$的n，這提供了我們由小的a_i造出大的a_j的方法，遂有下面的定義：

$$B_0=\{0\},$$

$$B_n=\{2(b+1)\text{或}3(b+1):b\in B_{n-1}\},\quad n\geqslant 1。$$

$$B=\bigcup_{0\leqslant n} B_n。$$

舉例來說

$$B_0=\{0\},$$

$B_1 = \{2, 3\}$,

$B_3 = \{6, 9, 8, 12\}$,

$B_4 = \{14, 21, 20, 30, 18, 27, 26, 39\}$,

$B_5 = \{30, 45, 44, 66, 42, 63, 62, 93, \cdots\}$,

值得注意的是，這些B_i並不是兩兩不相交，由(5)我們知道$K_n = n+1$若且唯若$n \in B$，也就是B收集了我們做實驗看到的那些數a_0，a_1，a_2，…，但是爲了理論與實驗的區分，我們將B中的元素由小到大排成$b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$，這樣不會和實驗的結果混而不清。爲了符號上的方便，令$b_{-1} = -1$。我們將著手證明最主要的結果，其實就是(E1)重寫而成。

(6) $\quad K_n = 1 + b_i$ 其中 $b_{i-1} < n \leqslant b_i$ 。

我們要用歸納法來證明(6)式。

當$n=0$時，$i = b_i = 0$，(6)式成立。

假設(6)式對所有$n' < n$均成立，由定義可知。

$$K_n = 1 + \min\{2K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor (n-1)/3 \rfloor}\},$$

如果

$$b_{j-1} < \lfloor (n-1)/2 \rfloor \leqslant b_j ,$$

則由歸納法假設

$$K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} = 1 + b_j ,$$

由(2)式

$$(n-1)/2 \leqslant \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1/2 ,$$

也就是

$$n \leqslant 2\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 2 \leqslant 2(b_j + 1),$$

因爲$b_j \in B$，所以$2(b_j+1) \in B$，又因爲$b_{i-1} < n \leqslant b_i$，所以$2(b_j+1)$=某個$b_k \geqslant b_i$，這證明了

$$2K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \geqslant b_i ,$$

同理

$$3K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \geqslant b_i ,$$

也就是說

$$K_n \geqslant 1 + b_i 。$$

爲了證明另一方向的不等式，我們還需要K_n爲遞增函數這個事實，也就是

(7) $\quad$ 若$m \leqslant n$ 則$K_m \leqslant K_n$ 。

(7)式可以由歸納法很容易證明，在此省略。利用(7)式，則因爲$n \leqslant b_i$，可得$K_n \leqslant K_{b_i}$，再利用(5)及b_i的定義，則$K_{b_i} = 1 + b_i$，總結得

$$K_n \leqslant 1 + b_i ,$$

(6)式因此得證。

結 尾

好了，大功告成，Knuth 數的長像刻畫出來，如果還有什麼遺憾的話，那就是b_i的定義還不夠簡明，如果有人能有一異於上述的講法，請通知我一聲，將會十分感激。

另外，也可以將原題目稍做推廣，假設P是一個正整數的集合，可能是有限，也可以無限，定義

$$\begin{cases} K(0, P) = 1, \\ K(n+1, P) = 1 + \min\{xK(\lfloor n/x \rfloor, P) \\ \qquad : x \in P\}, \; n \geqslant 0 。\end{cases}$$

也可以問問看$K(n, P)$是什麼？當$P = \{2, 3\}$時，就回到原來的問題了。

有興趣嗎？試試看吧！

——本文作者任教於交大應數系——