有必要定義二次因子嗎？

張進安

數學的研究，從不同的方向進行，到最後大致都會殊途而同歸，只是結論若不經整合，可能一時無法認清其相通的地方。以下是我最近的經驗：

寒假中，指導學生作一個科學展覽的研究，題目是：$\dfrac{1}{60}=\dfrac{1}{甲}+\dfrac{1}{乙}$ 有多少組解答。若以中學以上程度，則應改為：$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 有多少組整數解。由於小學生沒有代數運算及質因式分解的基礎，所以整個研究過程中，變成在探討 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{y}$ 之中的 a。我把學生研究的結果，作成較學術性的定義和定理，並加以證

明，再用代數的方式來解題，大家一起來看看它們殊途同歸的過程。

定義：設$D(n)=\{d_i : d_i | n\}$爲自然數n的所有因子集。定義$Q(n)=\{d | d=d_i d_j,\ d_i, d_j \in D(n)\}$稱爲$n$的二次因子集。若$d\in Q(n)$，且$d<n$，則稱$d$爲$n$的二次眞因子，其集合以$P(n)$表示。

定理：若$a\in Q(n)$，則必存在一$b\in Q(n)$，使得$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n}$爲$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的一組正整數解。反之，若$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n}$爲$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的一組正整數解，則$a\in Q(n)$，且$b\in Q(n)$。

證明：$(\Rightarrow)$

若$a\in Q(n)$，則$a=d\cdot f$，其中$d\in D(n)$，$f\in D(n)$。

$\because d\in D(n)$，$\therefore$存在$s\in D(n)$，使$n=ds$。

$\because f\in D(n)$，$\therefore$存在$t\in D(n)$，使$n=ft$。

若$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$，則

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}=\frac{a}{n(n+a)}$$

$$=\frac{df}{ds(ft+df)}=\frac{1}{st+ds}$$

$$=\frac{1}{n+st}$$

令$b=st$，$\because s, t\in D(n)$，

$\therefore b\in Q(n)$，故得證。

$(\Leftarrow)$

因爲$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$，我們僅考慮$x<y$之情形。若$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n}$，爲$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$之一正整數解，則$a<b$，且因$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}$，所以$a<n$。

在$1\leqslant a<n$之中，我們用無窮舉法來證明：

一若$a\in Q(n)$，則由前段證明，$b\in Q(n)$。

二若$a\notin Q(n)$，則a僅可能以二種型式存在：

(一) a含有與n互質之因子。

(二) a含有n的某一眞因子的三次方以上（例如$n=26$，$a=2^3$），以下將證明這兩種型式的a，都無法找到整數b，使$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n}$。

(一)若a含有與n互質的因子，則$a\nmid n$。若$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$，則

$$\frac{1}{y}=\frac{a}{n^2+na}。$$

$\because a | na$，但$a\nmid n^2$，

$\therefore a\nmid (n^2+na)$，即$\frac{a}{n(n+a)}$無法約成$\frac{1}{y}$的型式。

(二)若$a=d^3k$，$d\in D(n)$，且$d^2\notin D(n)$，（$\because$若$d^2\in D(n)$，則$a=d\cdot d^2\in Q(n)$，與前提矛盾）

則$\frac{1}{y}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}=\frac{a}{n(n+a)}$

$$=\frac{d^3k}{n(n+d^3k)}=\frac{d^3k}{n^2+nd^3k},$$

$\because d^3k | nd^3k$，但$d^3k\nmid n^2$（$\because n$中只含有1個d的因子，$\therefore n^2$只含有2個d的因子。）

$\therefore \dfrac{d^3}{n^2+nd^3}$ 無法約成$\dfrac{1}{y}$型式。

由一、二證明過程，可得證：若

$\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{n+b}=\dfrac{1}{n}$，則$a\in Q(n)$且

$b\in Q(n)$。

推論：$P(n)$有K個元素，則$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，

$x<y$，有K組正整數解。

證明：將$Q(n)$由小至大排列，必爲 $\{1,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots,n^2\}$ 而由定理得之，每一$a\in Q(n)$，必存在一 $b\in Q(n)$，使$\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{n+b}=\dfrac{1}{n}$。因 $\dfrac{1}{n+n}+\dfrac{1}{n+n}=\dfrac{1}{n}$，故當考慮$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，$x<y$時，則$a<n$，且 $a\in Q(n)$，故$a\in P(n)$，故$P(n)$之元素個數即爲$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，$x<y$之正整數解個數得證。

仔細考慮$Q(n)=\{1,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots,n^2\}$，就是$D(n^2)$，如果我們一開始便用代數的方式來處理$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，便可以得到明確的答案：

若

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

則

$$\frac{1}{n}=\frac{x+y}{xy}$$

$$xy=n(x+y)$$

$$xy-n(x+y)=0$$

$$xy-nx-ny+n^2=n^2$$

則

$$(x-n)(y-n)=n^2$$

$\therefore x-n\in D(n^2)$，$y-n\in D(n^2)$，

因爲

$n+a=x$，$n+b=y$，$\therefore a=x-n$，$b=y-n$，即$a\in D(n^2)$，且$b\in D(n^2)$，故$Q(n)=D(n^2)$，即n的二次因子集即n^2的因子集。因此，

$$P(n)\text{的元素個數}=\frac{D(n^2)\text{的元素個數}-1}{2},$$

總算讓因數個數的公式，在解$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，$x<y$，有多少組整數解中，有英雄用武的地方，同時也讓人體會到二次因子的定義是多餘的；但是對於尚未學過代數方程式解法的國小學生，我們又該如何呢？

──本文作者任教於高雄市凱旋國小──