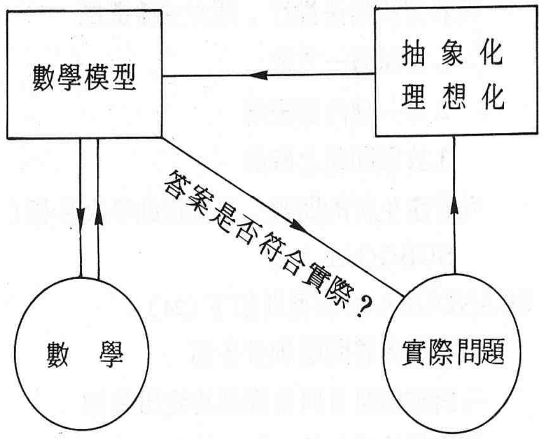
解題與數學教育 *

黃毅英

引 言

1900 年，當著名數學家希爾伯特(HILBERT)於巴黎國際數學家會議中致詞，為總結上一世紀的數學發展，並展望二十世紀的數學，提出了有名的廿三道希爾伯特問題，並指出：「只要一門科學能提供足夠的問題，它便有生命力。」1977年，美國全國數學督導員議會(NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS)〔27〕指出「學習解題是研讀數學之主要目的」，其後，美國全國數學教師議會(NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS)〔28〕即以「解題」定為八十年代學校數學教育之焦點。全國全日制十年制中學數學課程自 1977 年起也將目標定為「使學生…具有正確迅速的運算能力、一定的邏輯思維能力、和一定的空間想像力，從而逐步培養學生分析問題和解決問題的能力」〔1〕、〔2〕。自然地，這亦與數學作為解決實際問題工具的本質有關〔11〕、〔29〕(圖一)。



圖一

我們也許覺得現時教科書後數以百計的習題便是足夠的解題訓練。CRONBACH 對難題的定義正說明了這點〔16〕：「計算 743.2 的開方不算是我們所考慮中的難題。……學生只需依法泡製，並不比打字員把此稿件打出需要更多的工作。」在討論提高學生解題能力之法前，讓我們先探討學生的解題過程。

學生的解題過程

* 本文改寫自九○年四月香港大學教師在職訓練，及九○年六月香港教育署現職中學教師進修訓練課程講稿。

波利亞(POLYA)在其經典名著「如何解題」(HOW TO SOLVE IT)中擧出的解題四部曲可算是最早的解題模型〔32〕:

(一)認識問題

(二)設計解題計劃

(三)推行計劃

(四)回顧。

及後,NEWELL與SIMON〔30〕按其在人工智能上的研究,提出如下的解題步驟:

(一)將輸入轉成內部表示

(二)在解題空間內選出可行方法

(三)運用該法

(四)若方法無法推行,則有三種選擇

1. 嘗試另一方法
2. 另一種內部表示
3. 放棄問題之解決

(五)若產生新的問題,則處理此等次目標(SUBGOAL)。

SCANDURA的模型則如下〔24〕:

(一)解題者將問題細分各部

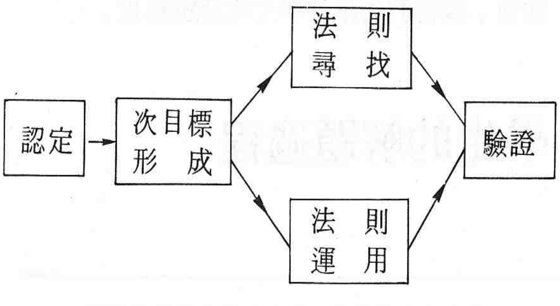
(二)對整個題目與各細部均定出目標

(三)找尋達成此等目標之法則

(四)判斷此等法則是否足以解決問題

(五)若然足夠便轉向另一次目標;若否,則轉向找尋統攝較低層次法則的高層次法則。足以解決問題與否亦於此處作決定。

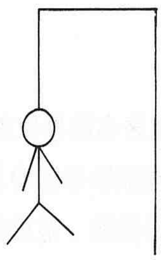
1980年香港中文大學研究生李芳樂〔26〕以225名中四(高一)學生作研究,並以路徑分析(PATH ANALYSIS)證立了以下數學解題的模式。



綜合而言,難題解決之第一步爲瞭解題目、析分細部、定下次目標,由各次目標之達成,問題也得到解決了。

解題策略

面對難題,我們當然可以胡亂的猜以各種方法,但成功的解題自然有賴有效策略之運用。今以「上吊」(HANGMAN)一遊戲爲例。上吊的玩法,首先由一方想出一個英文字,並說出有多少字母讓對方猜。猜字者猜該字含些什麼字母而無需猜其位置。猜中時,出字者必須符合字母所在之處,若猜不中則在紙上增出一劃,猜錯九次便形成一上吊圖(圖二)。



圖二

換言之,猜字者共有九次機會而此亦「上吊」一名之由來。

此種簡單的遊戲亦有其策略而非瞎猜,一般均曉得先猜母音,因絕大部份英文字均有母音。不過,我們不一定應從A字猜起。理由十分簡單:在英語中E字的使用率最高。又例如當出現了"IO__"或"I__G"時,我們會猜"ION"和"ING",這也和三字母字串的出現率有關。故此若借助英語的頻數表(圖三),猜字就更容易了。

再者,在沒有母音的情況下,我們嘗試半母音(如HYMN的Y),又或在母音已相當多時(如__I__E__A__),便不必再猜母音,以節省猜測的次數了(答案是SIDEWAY)。這些便是一些解題策略。

作爲國際數學競賽美國隊的多年領隊,L.C.LARSON在其「通過問題學解題」

Table of Frequency

Letter	Frequency(%)
E	13
T	10
A	8
O	8
N	7
R	7
I	6
S	6
H	5
D	4
L	3
F	3
C	3
M	3
UGYPW	2
BVKXJQZ	<2

Frequency of English Words

THE OF AND TO A IN THAT IS I IT
FOR AS WITH WAS HIS HE BE NOT BY
BUT HAVE YOU WHICH ARE ON OR HER
HAD AT FROM THIS MY THEY ALL
THEIR AN SHE HAS WHERE ME BEEN
HIM ONE SO IF WILL THERE WHO NO

(DIGRAMS)
TH IN ER RE AN HE AR EN TI TE AT
ON HA OU IT ES ST OR NT HI EA VE
CO DE RE RO LI RI IO LE ND MA SE
AL IC FO IL NE LA TA EL ME EC IS
DI SI CA

(TRIGRAMS)
THE ING AND ION ENT FOR TIO ERE
HER ATE VER TER THA ATI HAT ERS
HIS RES ILL ARE CON NCE ALL EVE
ITH TED AIN EST MAN RED THI IVE
REA WIT ONS ESS AVE PER ECT ONE

圖三

〔24〕中將探索法列出，包括尋找規率、繪圖、提一等價問題、修改問題、選擇有效記號、利用對稱性、區分種種情況、逆推、反證、利用奇偶性、考慮極端情況及推廣等。其他文獻還有舉出類比、代換、遞推、枚舉、待定係數、試驗、窮舉、抽屜(鴿籠)及數學歸納法原理等。

比方從分解 $t^3+6t^2+11t+6$ 懂得分解 $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$ 是一種類比，從解聯立線性方程的方法解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$$

或由 $\begin{cases} \ell\cos\theta+m\sin\theta+n=0 \\ p\cos\theta+q\sin\theta+r=0 \end{cases}$

消去 θ 均是一種代換。其中亦有類比的意味。

又如要證

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin(nx)$$
$$=K\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

其中 K 與 n 無關，要找 K，可先找 $n=1$ 作試驗。要證明

$$(1+k)x+(k-1)y-2k=0$$

必過一與 k 無關之點，除了可轉成

$$(x-y)+k(x+y-2)=0$$

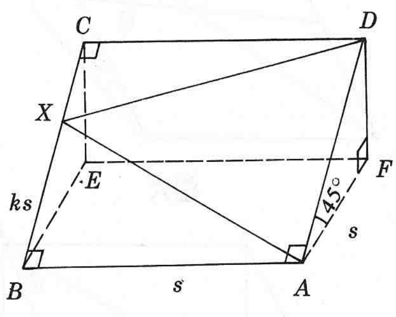
或 $$y-1=\frac{1+k}{1-k}(x-1)$$

外，亦可先試 $k=0$，$k=1$，得出特定直線 $x=y$ 和 $x=1$，其交點 $(1,1)$ 便是所求的定點了。這亦是一題多解之例。

相似、推廣與數學歸納

1980 年香港中學會考附加數學科有這麼的一道題目：

圖中(圖四)所示 AXD 爲 $ABCD$ 斜面上



圖四

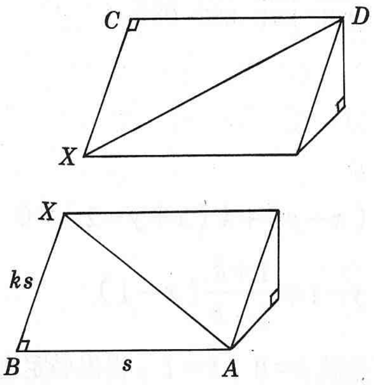
的小徑。AX 與 AD 爲直線。斜面與水平面 $ABEF$ 成 $45°$。設 $AB=AF=s$，$BX=ks$，α 則爲 AX 與水平之交角。

(a)用 s，k 表 AX 之長度。

(b)用 k 表 $\sin\alpha$。

(c)若 AX 與水平之交角小於 30°，求 k 之值域。由此，求 k 之值域使得 AX 及 XD 與水平之交角均小於 30°。

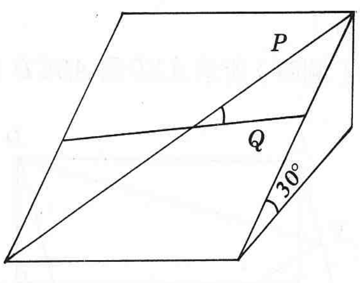
於(c)部中，按 AX 的條件求出 $0\leq k\leq 1$ 這值域後，對 XD 的部份與前完全類似。我們實無須再做一次。事實上，斜面的上下兩部份完全相似（圖五），故此只須將 k 換以 $\sqrt{2}-k$



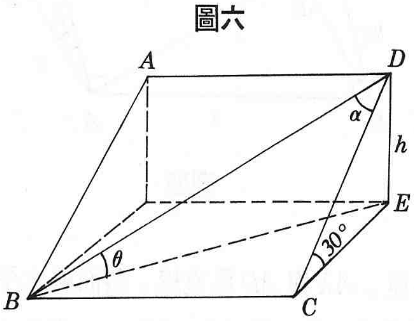
圖五

即得 $0\leq\sqrt{2}-k\leq 1$。兩值域合起來便是 $\sqrt{2}-1\leq k\leq 1$ 了。下例亦如是：

圖六中，P，Q 兩小徑與水平的交角分別為 10° 與 20°，求兩小徑間的交角。我們一併考慮小徑與水平角為 θ 的一般情況（圖七）。



圖六



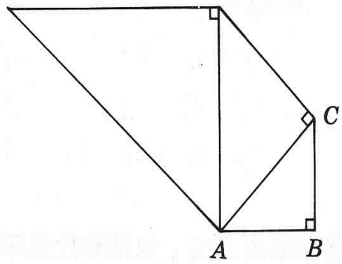
圖七

此時，$\alpha=\sin^{-1}(2\sin\theta)$，故原來問題的答案即為

$$\sin^{-1}(2\sin 20^\circ)-\sin^{-1}(2\sin 10^\circ)\approx 22^\circ$$

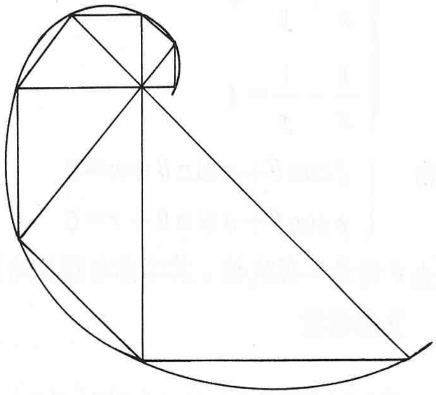
這是一種推廣。

其數學歸納法也是一種推廣。圖八中 ΔABC 為等腰三角形，B 為直角，AB 長 1 cm。於其斜邊上再畫類似等腰直角三角形，前後共畫三個，如圖。現求最大三角形之斜邊



圖八

長。既然三個三角形完全類似，故可看邊長為 a 的一般情況。此時斜邊即為 $\sqrt{2}\,a$。故第一斜邊長 $\sqrt{2}$，第二斜邊長 $(\sqrt{2})^2$，第三斜邊長 $(\sqrt{2})^3$。再推而廣之，第 n 斜邊即為 $(\sqrt{2})^n$ 了。這便是數學歸納法原理。由此亦可看出，各三角形頂點置於螺旋線 $\rho=(\sqrt{2})^{4\theta/\pi}$ 上（圖九）。


圖九

從上可見，數學歸納法（正如不少人已指出）不只是在給出命題後之證明法，而是一種思維模式、一種解題策略。求平面上 n 直線（沒有兩線平行也沒有三線共點）的交點數量 $p(n)$ 便是常見一例。在新加第 n 線時，它會

與先前$n-1$線各交一點，故有

$$p(n)=p(n-1)+(n-1)$$

逆推即有

$$p(n)=(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}。$$

以下則是較有趣一例（解答見下節）：

於一宴會中n對夫婦互相握手，而夫婦間不互握。張先生發現除自己外，所有人握手次數均不相等，問張太太共握手幾次？

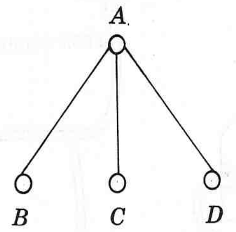
尋根究底

抽象是數學的特色，亦是不少人害怕之處。可是抽象實由具體而來，在碰到抽象的困難時，我們大可找回它具體的「根」，抽象的概念就不難理解了。例如學生每每害怕二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解

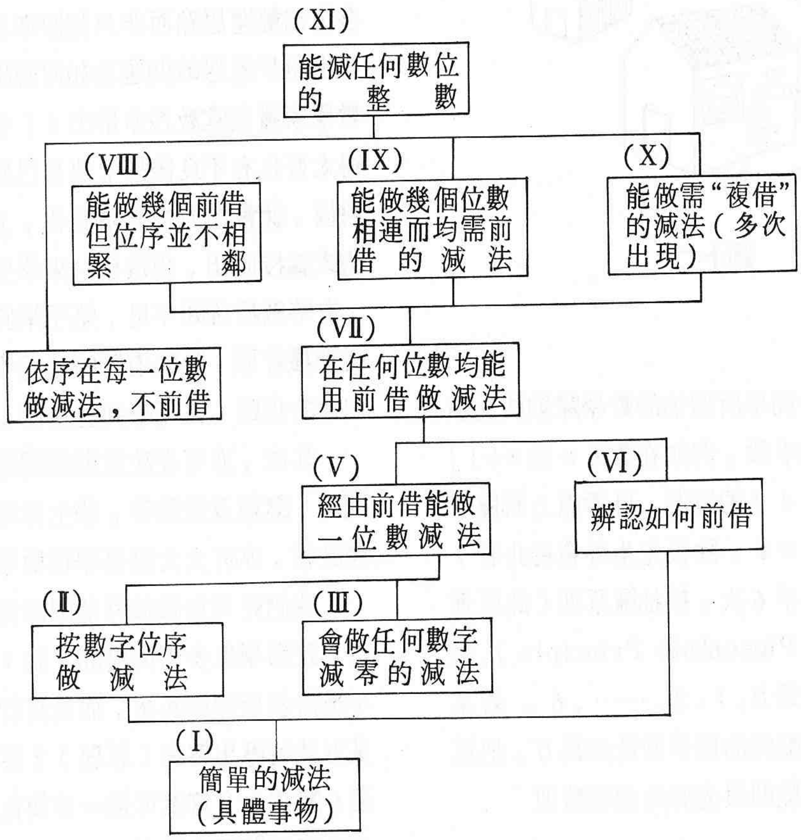
$$x=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

之證明，然而它其實是千千萬萬題完全平方法的推廣與抽象罷了。我們讓學生逐步解 $2x^2+5x-6=0$，$2x^2+5x+c=0$，$ax^2+5x+c=0$ 等，再走過抽象的過程，上面的公式也較易掌握了。

GAGNÉ[20]的學習層構說也是指出要學習其概念A，可能要靠預備知識B,C,D（圖十）而B,C,D又建基於其他預備知識等（圖十一）；要學習A，就先得從它的「零件」學起。在遇到困難時，例如是A點，我們可回溯B,C,D三點何處出毛病，加以鞏固後，A點

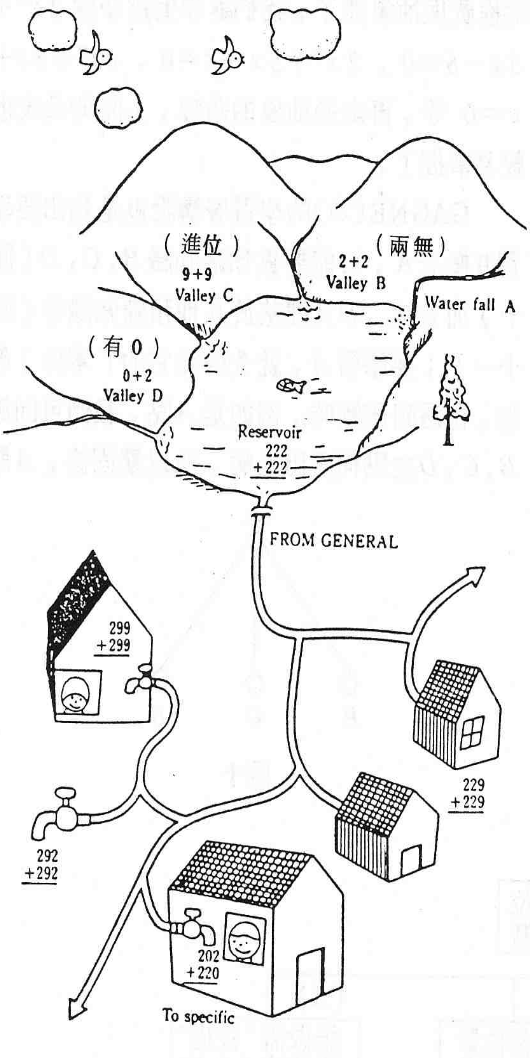


圖十



圖十一　「減整數」的學習層次

就可自然而然的達到了。上面的尋回抽象於具體的做法其實類似。日本之「水道教學法」〔8〕的原理(圖十二)也是相仿的。



圖十二

此外，不少同學所懼怕的數學歸納法之學習亦可用到這種手段。例如在證「n 推 $n+1$」之前先看「3推4」的情況。再考慮上面握手這問題。先設 $n=4$。除張先生外會場共有7人而每人最多握手6次。按抽屜原理(此原理亦稱爲鴿籠定理 Pigeonhole Principle)，這7人的握手數量爲0，1，2，……，6。若某君握手6次，其配偶的握手數量必爲0。把這對夫婦抽出，處境即與先前的處境類似

$$\begin{array}{ll} \text{原　來：} & \boxed{0},1,2,3,4,5,\boxed{6} \\ & \quad\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \text{抽出後：} & \quad\ 0,1,2,3,4 \end{array}$$

由此即可推出張太太的握手數量必處於中央(即3次)，而於一般的 n 而言，應共握手 $n-1$ 次。

對於幾何、微積分，甚至代數與集合論等問題，多用繪圖可協助解題，而對於不少同學恐懼的立體問題，更是非借助繪圖不可了。然而這本身亦可算是一種抽象過程，從觀察立體實物到用平面圖描繪立體處境再到只靠文字瞭解立體問題。從上，我們亦可尋回這空間想像力的「根」，若一時間不能單從文字瞭解立體問題，亦可先從製作立體模型等做起〔7〕、〔31〕。

解題能力之增強

GAGNE〔20〕指出，任何解題行爲均可作教授的。要增強數學解題能力，首先在教學時多指出解題思路而非只把標準答案和盤托出。指出每步遭遇的問題和如何想出下一步。旅美數學家蕭蔭堂教授亦指出：「有時教授備課備得太好也有不良後果。他自己確切把握到這學科後，就會盡力把它精簡化，上堂用最雅潔的方式講授而出，但這樣一來學生反而難以得益。有時教授備課不足，笨手笨脚的算錯了數，從他搔着頭，唸唸有辭的改正中，反而可以看出他的思路，眞正學到些東西。」

其次，亦可在教室開闢問題徵答欄，展出問題、謎題及遊戲等。學生亦可貼出自己的難題徵答，亦可大大提高學習數學的氣氛和趣味。

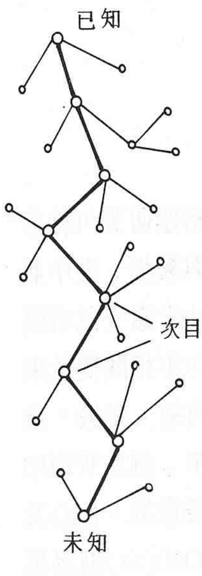
我們更可加強波利亞四部曲的「回顧」部份，鼓勵學生多方面提問，如：答案正確嗎(不是指核對標準答案，而是自行驗算)？何以某方法可得出答案(原理)？答案中那步最重要(關鍵)？答案可進一步簡化嗎？解答可否用於類似問題(推廣)？有其他答案嗎(一題

多解）？若有其他答案，那個較好，那個較快，那個能切合更廣的問題（有時快方法的適合性較窄）？有否資料不足或過多的情況（可惜大部份坊間題目都沒有這種情況）？若將題目條件改動又如何（觸類旁通）？等等〔4〕。

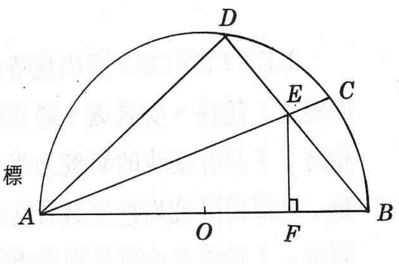
可惜現時學生接觸到的題目大部份都是公開試的樣板，題目資料剛好盡用，每數字只用一次，而運用的法則從文意容易得知的。我們若能提供多點非考試樣板式的題目，則會對提高解題能力有所幫助。

以簡馭繁與腦部衝擊

數學問題的解決往往是一條由已知通往未知的路（圖十三）。以下便爲一例。圖十四中 $ADCBO$ 乃以 O 爲圓心之半圓。EF 與 AB 垂直。證明 $ODCF$ 共圓。



圖十三

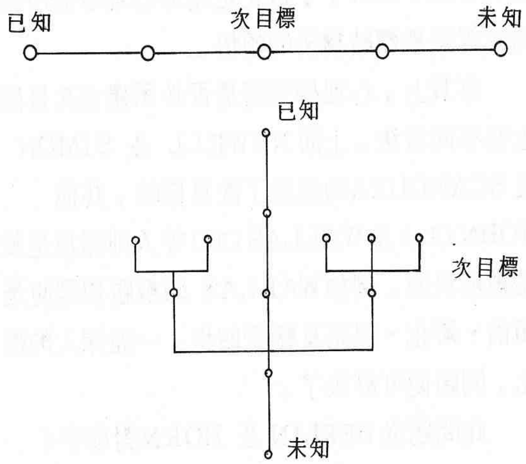


圖十四

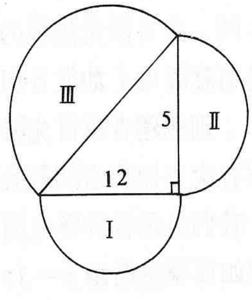
從已知出發：從半圓可知 ADB、ACB 均爲直角，又有圓內諸角的關係（如 $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC$ 等）。從各直角三角形（EFB 等）有畢氏定理——但此題非關長度，似乎用不着，……如此便漸迫近答案了。我們又可反過來問：要證明 $ODCF$ 共圓即要證 $\measuredangle DOC = \measuredangle DFC$ 或 $\measuredangle DOF + \measuredangle DFC = 180°$，前後夾攻，不難打通與未知間的路徑。

如此我們漸已建立一些次目標（圖十三）：例如先證 $\measuredangle DFE = \measuredangle EFC$，設之爲 x，再證明 $\measuredangle DOC = 2\measuredangle DAE = 2x$ 等，經過一連串的工序，未知便可達到了。

以上的次目標是縱向的，即先完成甲階段，再完成乙……等等。但次目標也可以是橫向的（圖十五），如在圖十六中，求兩小半圓面積和與大半圓面積的差別，次目標自然是求區域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的面積。這三步驟沒有先後的分別（答案：0）。



圖十五



圖十六

FELDHUSEN 等人〔19〕亦有列舉所謂「用不慣常方式看常見問題」的解題能力。從上面從已知通往未知的觀點，在每一步驟中尤須發掘下一步的一切可能性，並估計最大可能的通道，就如遠足者覓路般。這與輔導中常用腦部衝擊的習作極爲類似。筆者曾將腦部衝擊

習作改良用作增強學生的解題能力，實際證明相當有效。詳可參見「腦部衝擊習作與數學解難技巧之訓練」〔5〕一文。

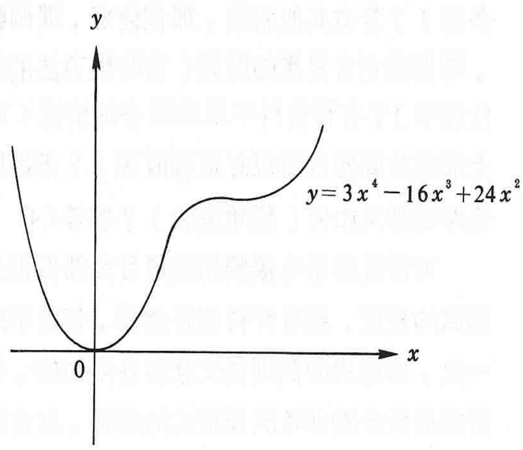
頓　悟

上面所學的解題方式均是一步一步的趨向答案，如設立若干次目標等。而事實不一定如是，就如在「上吊」的遊戲中，當見到SI__LATION、_NI_IA_ION之類，我們可能一下子就猜中它們是SIMULATION和INITIATION了，這正是完形心理學派所講的從認識整體結構後的頓悟。

事實上，心理學家對是否必須建立次目標也有不同看法。上面NEWELL & SIMON及SCANDURA均假設了次目標的，其他JOHN〔22〕及WALLAS〔37〕等人則認爲是整體被解決的。例如WALLAS 的解題模型便是預備、孵化、照亮及驗證四步，一經深入的孵化，問題便可解決了。

此問題從BERLIN & HORN對砌字（ANAGRAM）的研究得到初步的解決。他們發現若給出無意義的字串（如從LISIMRA砌回SIMILAR）時，次目標是無須的；但若給出的字串本身是有意義的（如從SOURCE 砌出COURSE），則解題者須首先將字串打散。故此是否需要有次目標要看問題的困難程度。

無論如何，我們必須容許學生隨時有頓悟的解題方式。例如要學生描繪$y=3x^4-16x^3+24x^2$。若學生知此爲四次方程，x^4的係數爲正，將之改寫爲$y=x^2(3x^2-16x+24)$便知只有一實重根（$x=0$）。又$y'=12x(x-2)^2$有二根（$x=0, 2$），後者爲重根，便可即得其形狀（圖十七）而無須計算其二階導數等。又如從$3:x=\frac{1}{2}:8$求x，觀察到8爲



圖十七

$\frac{1}{2}$的16倍，故$x=48$；在簡化$4m(a-2c)+7n(2c-a)$時，知$a-2c$爲$2c-a$之負，即得$(4m-7n)(a-2c)$而無須先轉成$4m(a-2c)+7n[-(2c-a)]$等等。總之，我們未必要刻意教授這些頓悟式快方法，但總要不去桎梏這種思路之可能性。

情性區宇

LESTER〔25〕指出現時解題研究可約分四變量：任務、受試者、過程與教授。文中並指出：「只有極少的研究乃集中考慮受試者變量，大部份研究均把受試者當作不相關變量來看待。」於同文中更分別考慮興趣、動機、信心、恒心及冒險意願等情性區宇。例如WEBB, MOSES & KERR〔38〕認爲意欲、恒心及自信三項至爲重要。ROBINSON〔33〕則發現有高解題能力者有較高的自尊。KEISLER〔23〕與DAVIS〔17〕均指出解題者必須自信確有解題能力方能導致解題的成功。因缺乏自信使解題者在未有足夠嘗試前已放棄了解題〔16〕。

ZIMMERMAN & RINGLE〔42〕乃跟進BROWN & INOUYE〔14〕的研究，證實示範者的恒心與自信之言確能增強觀察者的解

題自信。筆者則曾對強化作用（REINFORCEMENT）、自我監察（SELF-MONITORING）對數學的解題表現作過研究。

自我監察是SNYDER提出的觀念〔35〕、〔36〕。它是個體於團體中對環境所提出的提示之運用程度。高自我監察者乃「隨環境而變的人」，低自我監察者則屬於「我行我素」。要改變前者的行爲，用環境的因素已是足夠；但要改變後者則須先說服其根本態度。筆者曾從158初中生抽出高低自我監察者各30人作實驗，發現強化作用對於增進解題表現於高監察者比低監察者更爲有效〔39〕、〔40〕。

結語：解題—八十年還是九十年代的數學教育？

八十年代提出了以解題作爲數學教學的目標，還說可藉之培養觀察、理解、記憶、運用、運算、推理證明、空間想像、自學、抽象、探究等能力〔12〕，於是推出了很多數學謎題、遊戲及競賽等去達到此等效果。不過亦漸有對數學競賽、數學遊戲等是否便是數學學習有所質疑。

以數學遊戲而言、田尼氏（DIENES）〔18〕提出數學概念可透過自由玩耍、有規律遊戲、尋找共同結構、描述或圖式、符號化、形式化六個階段完成。若以數學學習是尋找規律這個廣義角度觀之，數學遊戲能達到數學學習自無可置疑，遊戲且能消除不少人對數學的恐懼。不過，數學概念往往是連串抽象的結果，所以找到適合的遊戲較爲困難，然而能兼顧遊戲趣味及數學學習的遊戲仍是不少的〔10〕。

解題在九十年代的數學教育的角色又在那裏呢？「數學在乎」〔15〕便指出：「常有人說學習數學應是爲了建立邏輯思維能力、準確性與空間醒覺。數學學習固然可於此產生功能而達到之程度端視教學之方法。況且，此種效能亦非數學所獨具；不少其他活動及學科均能建立此等能力。故此我們相信培養這些能力不足以構成必須學習數學而非其他學科的原因。然而，教師却須注意數學在這方面的功能。」「九十年代之學校教學」〔21〕中亦提出過程（解題經驗等）與結果（數學概念本身）並重。相信九十年代的數學仍會着重解題的訓練，但同時亦不會忽略數學概念的建立〔6〕。

國外教育學常着重「觀」（BILDUNG）這意念（如人生觀、價值觀、世界觀等）。除了解題能力外，數學教育的目標恐怕便是建立一種「數學觀」。如上所述，將問題套入數學模型加以處理恐怕便是數學觀的一種了。

最後欲將解題在學生心智成長上的更廣濶意義作結。存在主義提出的成長過程乃從個體由不安（難題）產生智性反彈到於較高層面上得到從新安頓（解難）而成。GAGNÉ〔20〕亦指出解題後，解題者從低層次法則中結合學會較高層次法則；SCANDURA〔34〕之模型中亦指出在解題者解決不了問題時，會轉而尋找統攝較低層次法則之高層次法則。

中國禪宗亦常挑起學生的疑情（不安），孔子也云「不悱不啓、不憤不發」，而道家則說「小疑小悟、大疑大悟、不疑不悟」。「六祖法寶壇經」付囑品中更進一步說明：「若有人問汝義，問有將無對，問無將有對；問凡以聖對，問聖以凡對，二道相因，生中道義」，這就是從對立的不安中，迫使解題者提升至較高層面〔9〕、〔41〕。

——本文作者任教於香港中文大學
教育學院——

參考書目

1.十三院校協編組(1980),中學數學教材教法,人民教育出版社。

2.「中學數學教師手册」編寫組(1985),中學數學教師手册,上海教育出版社。

3.黃毅英(1986),填鴨教育與心智啓廸,明報(5/7),香港。

4.黃毅英(1987),學習數學過程中之觸類旁通,數學傳播(44)p.60～64。

5.黃毅英(1989),腦部衝擊習作與數學解難技巧之訓練,數學傳播(52)p.93～96。

6.黃毅英(待刊),九十年代的數學教育。

7.黃毅英(待刊),空間想像力之訓練。

8.遠山啓,銀林浩(1971),水道方式入門,國土社,日本。

9.蓮華(1987),反問與反省,華僑日報(8/9),香港。

10.鄭肇楨(1980),數學遊戲,商務印書館,香港。

11.蕭文強(1978),爲什麼要學習數學,學生時代出版社,香港。

12.韓家榘(1982),數學教學中如何培養能力,科學普及出版社。

13. Berlin, H. & Horn, R. (1962). Transition probability effects in anagram problem solving, Journal of Experimental Psychology (63), 523-527.

14. Brown, Jr., I. & Inouye, D.K. (1978). Learned helplessness through modelling: the role of percieved similarity in competence, Journal of Personality and Social Psychology (36), 900-908.

15. Cockcroft, W.H. (1983). Mathematics Counts, H.M.S.O., London, England.

16. Cronbach, I.F. (1955). The Meaning of Problems, In Seidman, J.M. (Ed), Readings in Educational Psychology, 193-201. Houghton Mifflin, Boston.

17. Davis, G.A. (1973). Psychology of Problem Solving, Theory and Practice. Basic Books, New York.

18. Dienes, A.P. (1981). Building up Mathematice, Hutchinson Educational Ltd., London.

19. Feldhusen, J.F., Houtz, J.C., & Ringenbach, S.E. (1972). The purdue elementary problem-solving inventory, Psychology Reports, 891-901.

20. Gagné, R.M. (1973). The Conditions of Learning, Holt, Rinehart, & Winston, New York.

21. Howson, G. & Wilson, B. (Ed) (1986). School Mathematics in the 1990s, Cambridge University Press, England.

22. John, E.R. (1957). Contributions to study of the problem solving process, Psychological Monographs (71).

23. Keisler, E.R. (1957). Teaching children to solve problems: a research goal, Journal of Research and Development in Education (3), 3-14.

24. Larson, L.C. (1983). Problem Solving Through Problems, Springer-Verlag.
25. Lester, Jr., F.K. (1980). Research on mathematical problem solving, in Shumway, R.J. (Ed), Research in Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics.
26. Li, F.L. (1980). Analysis of Cognitive Strategies of Problem Solving Process in Mathematics and Physics, Masters Thesis, Chinese University of Hong Kong.
27. National Council of Supervisors of Mathematics (1977). Position Paper on Basic Mathematics Skills, National Institute of Education, Washington.
28. National Council of Teachers of Mathematics (1980). Problem Solving in School Mathematics, 1980 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook.
29. National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, U.S.A.
30. Newell, A. & Simon, H.A. (1972). Human Problem Solving Prentice-Hall, U.S.A.
31. Nicholson, J.R. & Seddon, G.M. (1977). The understanding of pictorial spatial relationships by Nigerian secondary school students, Journal of Cross-cultural Psychology (8), 381-400.
32. Polya, G. (1957). How to Solve It, Doubleday Anchor Books, New York.
33. Robinson, M.L. (1973). An investigation of problem solving behavior and cognitive and affective charactistics of good and poor problem solvers in sixth grade mathematics, Dissertation abatracts International (33), 5620A.
34. Scandura, J.M. (1977). Problem Solving: A Structural/Process Approach with Instructional Applications, Academic Press, New York.
35. Snyder, M. (1979). Self-monitoring processes, in Bertowitz, L. (Ed), Advances in Experimental Social Psychology (12), 85-128.
36. Snyder, M. (1987). Public Appearances/Private Realities: The Psychology of Self-monitoring, W.H. Freeman & Co., New York.
37. Wallas, G. (1926). The Art of Thought, Farcourt, Brace, Jovanovich, New York.
38. Webb, N.L., Moses, B.E., & Kerr, E.R. (1977). Development Activities Related to Summative Evaluation (1975-76) (Tech. Rep. 4), Mathematics problem solving project, Bloomington.
39. Wong, N.Y. (1987). Effects of Self-monitoring and Reinforcement on Problem Solving Performance, Master Thesis, Chinese University of Hong Kong.
40. Wong, N.Y. (1988). Effects of Self-monitoring and Reinforcement on Problem Solving Performance, Educational Psychology (8), 153-160.
41. Wong, N.Y. (1988). Sensing that a problem exists and motivation of learning, Hong Kong Science Teachers Journal (16), 59-68.
42. Zimmerman, B.J. & Ringle, J. (1981). Effects of model persistence and problem solving, Journal of Educational Psychology (73), 485-493.