

乘法表的結合性

石厚高

設一集合 S 及定義於 S 之二元運算 $*$ ，若滿足下列三條件則 $\{S; *\}$ 就稱作“群”

1. S 有單位元素 e ，對 S 中任一元素 a 恒有

$$a * e = e * a = a$$

2. S 中任一元素皆有反元素，若 $a \in S$ ，則必有 $b \in S$ 使

$$a * b = b * a = e$$

3. S 中元素對 $*$ 有“結合性”，即 $a, b, c \in S$ ，則

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

以上是“群”的定義

丘成桐君曾獲費爾滋獎，他說過在初度接觸“群”的時候是“一頭霧水”，我看了十分高興，我再也不自卑了。

把“群”介紹給學生不是一件很簡單的事，“數播”第五卷第三期劉奕章君的“群的研究”說得多麼委婉多麼含蓄，不論是中學生或大學生一開始學“群的定義”都會有疑問：「爲什麼要這樣定義？」不必多作解釋，只要一言以蔽之答以「因爲它有用。」就可以了。在一開始作入門介紹時是無法講它的應用，講得愈多學生愈是“一頭霧水”。

學生問“爲什麼？”是心理上的爲什麼而不是邏輯上的爲什麼。下面這些模式，在學生問“爲什麼要這樣定義？”時，我常用來解釋給學生聽，例如行列式展開的定義，六個三角函數的定義等等。下面的解說，雖然不能徹底“解惑”，至少“接受它的定義”是沒有問題

的。

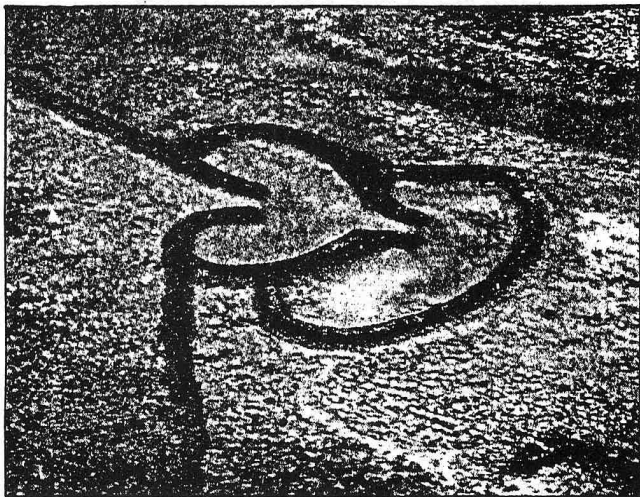
數學就是一套套的模式(model)，搞數學的用它來解決問題，醫生有醫生的模式，漁夫有漁夫的模式，都是要用它們來解決本行的問題。

我在南京見過漁夫打魚，他們把一種很像鴨子的家禽放入水中，這些家禽就去抓魚，抓到魚無法吃下去，因爲漁夫在牠們的頸子上套了一個環，牠們飛上船主人就把魚收起來，再把牠們放下水去抓魚，沒有幾次牠們就不熱心了，這個時候漁夫就把環拿下來給牠們吃一條小魚，再套上環要牠們工作，不能給牠們多吃，多吃就不幹活兒了。

在電視上我見過日本的漁夫也是用類似的方法作業，不過沒有給牠們在頸子上套個環，而是放在海中讓牠們吃個飽，等牠們飛上船就抱著牠用力把牠的肚子一擠，把牠吃的魚全部從口中擠出來，於是牠們又餓了，只好再去幹活兒，這一招似乎高明多了。

澎湖七美島的漁夫作了個形如下頁圖的“石滬”，利用潮汐的漲退來捕魚，當海水上漲時，魚就隨著漲潮，游到岸邊的石滬來，海水一退潮，就帶著魚從石圈接口處排出，此時漁夫只要在出口處佈上網就行了。

而醫生也有醫生的模式，我在牙醫診所見過他們用的工具，放在一個大盤子裡，林林總總我完全看不懂，那都是牙醫用來拔牙齒的工具，外行當然不會瞭解，我在榮總住過幾個月，見到了我最驚訝的模式。



澎湖七美島的石滬

我住的病房是兩個人一間，有天抬進來一個病人，醫生進來摸摸他的肚子，就對護士說：“排尿”，護士準備好各種器材，實習醫生就把一根直徑約為 0.5 公分的管子先在一個裝了油的盤子中泡一下，再由下體插入膀胱，馬上就看見小便流入了連在管子上的塑膠袋中，醫生又把注射器往塑膠管中注入無色液體，我覺得很奇怪，那不是把它注入膀胱了嗎？醫生說沒有，這個管子看起來是一根管子，其實是兩根管子，管子裡面還有管子，我把淨水注入內管，內管在膀胱中的一端就會有小小泡突起，卡在膀胱的出口處使管子不致滑落，排尿不成問題再等待治療，我說這麼奇妙的東西從來沒有見過也沒有想像到，醫生說更奇妙的東西你還沒有見過，我又問醫生我國在古代怎麼辦呢？他說“本草綱目”中提過，用一根葱放進去，我的“病友”馬上就可以下床走路了，以往我一直以為數學是天地間第一等的學問，現在我知道了醫學也是天地間第一等的學問，能讓一個人抬著進來自己走出去，這當然是天地間第一等的學問。

以上是醫生漁夫的模式，用來解決他們工作上的問題，“群”是數學家的模式，用來解決數學或物理上的問題。

要驗證“群的結合性”是一件很麻煩的事

，設 $S = \{a, b, c\}$ ，定義於 S 的二元運算 $*$ 如下：

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

自三個相異文字 a, b, c 中取三個排成一列，可以重複其法有 27 種

三同	同同異 (二同一異)	三異
aaa	aab aac bbc bba cca ccb	abc acb
bbb	aba aca bcb bab cac cbc	bca bac
ccc	baa caa cbb abb acc bcc	cab cba

所以這個乘法表的“結合性驗證”需要驗證 27 個等式，例如其中的一個是

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

而

含 4 個文字乘法表的“結合性驗證”

要驗證 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 個等式；

含 5 個文字乘法表的“結合性驗證”

要驗證 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 個等式；

.....
含 n 個文字乘法表的“結合性驗證”

要驗證 $n \times n \times n = n^3$ 個等式；

不論是 27 個或 64 個都夠麻煩，其它的就更不必提了，能不能把這些等式的個數減少一些呢？那就要看乘法表的性質了。

如果 $a, b \in S$ ，且 $a * b = b * a$ ，就是 S 對 $*$ 有“交換性”，此時

$$a * (a * a) = (a * a) * a$$

自然成立，所以等式中的“三同”就不必驗證了。

$$\text{又 } a * (b * c) = a * (c * b)$$

也是必然成立，所以六個等式

$$a * (b * c) = (a * b) * c \dots\dots(1)$$

$$a * (c * b) = (a * c) * b \dots\dots(2)$$

$$b * (c * a) = (b * c) * a \dots\dots(3)$$

$$b * (a * c) = (b * a) * c \dots\dots(4)$$

$$c * (a * b) = (c * a) * b \dots\dots(5)$$

$$c * (b * a) = (c * b) * a \dots\dots(6)$$

只要驗證(1)、(3)、(5)三個就可以了。

要驗證的等式若有“單位元素” e ，則

$$e * (a * b) = a * b = (a * b) * e$$

也就不必驗證了。

最後，若 $x, a \in S$ ，且 $a * x = x * a = x$ ，則 x 稱作“零元素”， S 中任一元素與 x 經*的左右運算之後恒為 x ，當然就不必驗證了。

把以上討論作個總結，寫成“五言律詩”

欲知結合性， 核驗太麻煩；
若有“零”和“單”，略去可不管；
若要更簡單， 除非“可交換”；
僅驗“同同異”， “三異”核其半。

這首詩不是我作的，我不能掠美，它是民國57(58?)年間我在一本升學輔導的小冊子上看到的，這已經是將近二十年前的事了，小冊子再也找不到了，不過這首詩倒還記得，當年教“新數學”是要教“群”的，我把這首詩講給學生聽，反應極為熱烈。提到“數學詩”就不能不提李宗元的“胖子原理”。

東華本第一冊第266頁對“凱氏原理”(Cavalieri's Principle)有如下的描述：

已予二立體與一平面，設平行此平面之任一平面若交此二立體中之一立體，則亦交其另一立體，且所交之橫截面有相同之面積，則此二立體有相同之體積。

這段文字講得很好，實在是不能再簡潔了，可是李宗元的“胖子原理”

兩個胖子一般高，平行地面刀刀切；

刀刀切出等面積，兩人必然同樣胖。

把“凱氏原理”詮釋得更簡潔而有趣，其實“胖子原理”也可以改作“瘦子原理”

兩個瘦子一般矮，平行地面刀刀切；

刀刀切出等面積，兩人必然同樣瘦。

用這首詩來介紹“凱氏原理”學生的歡呼聲雖然不是“響徹雲霄”，至少也讓“隔壁班”感受到快樂的氣氛，下課後他們跑來問「你們剛才笑什麼？那麼高興？」

用電腦驗證結合性

結合性的驗證是很麻煩的，我用BASIC試測，對於定義於 S 的二元運算 $*$ 來說，元素個數與測試時間有如下的記錄：

元素個數	檢驗時間(秒)
10	21
15	58
20	128

要是使用人力的話，恐有力不從心之嘆。搞過“群”的都知道，四個元素要驗證結合性就已經很“累”了，何況是10個20個，不過在這個試測的程式裡，“五言律詩”的結論派不上用場，一則是設計的麻煩，再則是增加了“IF”指令與副程式(subroutine)，在電腦的執行時間上來說不會佔到便宜。

若使用轉譯(COMPILE)過以後的COMMAND FILE 則所得結果為

元素個數	檢驗時間(秒)
10	0
15	0
20	1
50	5
100	21

以上是在PC_{xt}機型上，驗證乘法表結合性的結果，作業方式為

有結合性時，在螢幕顯示“有結合性”。無結合性時，在螢幕顯示“無結合性之不等式有39個”。