$\sqrt{\alpha}$ 的近似分數與 $X^2-\alpha Y^2=1$ 的正整數解之間的關係

葉東進

對於非完全平方的正整數 α，$\sqrt{\alpha}$ 是一個無理數。如果 $\frac{p}{q}$ 是 $\sqrt{\alpha}$ 的一個近似分數，則整數點 (p,q) 將落在直線 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 的附近。由於直線 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 上不存有整數點。因此，尋找 $\sqrt{\alpha}$ 的近似分數，從幾何觀點來看，便是尋求 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 附近的整數點，點取得愈接近直線，值的近似程度也就愈高。因爲直線 $L: x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 是雙曲線 $\Gamma: x^2-\alpha y^2=1$ 的一條漸近線，爲了逐次取得 $\sqrt{\alpha}$ 的更佳近似分數，我們能否從 Γ 上的某一整數點 (p_1,q_1) 出發，沿著 Γ 逐步獲得一序列的整數點 (p_2,q_2)，(p_3,q_3)，……，這些點是一點比一點更接近 L，相對的，$\frac{p_k}{q_k}$ 也就一個比一個更逼近 $\sqrt{\alpha}$？

本文先就 $\sqrt{3}$ 的特例，介紹三種不同的尋找近似分數的方法，比較它們逼近速度的快慢，從中觀察一些現象，之後，再進入一般 $\sqrt{\alpha}$ 的討論，探討三種方法之間彼此的因果關係。

一、$\sqrt{3}$ 的近似分數

方法(一)（牛頓法）：

取 $a_1=2$

由 $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{2}{a_k}\right)$，$k\in N$

得近似分數列 $\langle a_k\rangle$ 爲：

$$a_1=\frac{2}{1},\ a_2=\frac{7}{4},\ a_3=\frac{97}{56},$$

$$a_4=\frac{18817}{10864},\ a_5=\frac{708158977}{408855776},\cdots$$

取 a_k 的最簡分數 $\frac{p_k}{q_k}$，相對地我們得到一序列整數點 (p_k, q_k) 爲：

$(2,1)$，$(7,4)$，$(97,56)$，

$(18817,10864)$，……

方法(二)：

取 $x_1=2$，$y_1=1$

由 $(2+\sqrt{3})^k=x_k+y_k\sqrt{3}$，$k\in N$

得一序列整數點 (x_k, y_k) 爲：

$(2,1)$，$(7,4)$，$(26,15)$，$(97,56)$，

$(362,209)$，$(1351,780)$，

$(5042,2911)$，$(18817,10864)$，……

令 $\frac{x_k}{y_k}=b_k$，相對地我們得到 $\sqrt{3}$ 的一個近似分數列 $\langle b_k\rangle$ 爲：

$$b_1=\frac{2}{1},\ b_2=\frac{7}{4},\ b_3=\frac{26}{15},\ b_4=\frac{97}{56},$$

$$b_5=\frac{362}{209},\ b_6=\frac{1351}{780},\ b_7=\frac{5042}{2911},\cdots$$

方法㈢：

把$\sqrt{3}$表爲循環連分數：$\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,1,2,\cdots\cdots]$，其漸近分數爲

$$c_1=[1,1]=1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},$$

$$c_2=[1,1,2]=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$c_3=[1,1,2,1]=\frac{7}{4},$$

$$c_4=[1,1,2,1,2]=\frac{19}{11},$$

$$c_5=[1,1,2,1,2,1]=\frac{26}{15},$$

$$c_6=[1,1,2,1,2,1,2]=\frac{71}{41},$$

我們得到$\sqrt{3}$的漸近分數列$\langle c_k\rangle$爲：

$$c_1=\frac{2}{1},\ c_2=\frac{5}{3},\ c_3=\frac{7}{4},\ c_4=\frac{19}{11},$$

$$c_5=\frac{26}{15},\ c_6=\frac{71}{41},\ c_7=\frac{97}{56},\cdots\cdots$$

取c_k的最簡分數$\dfrac{u_k}{v_k}$，相對地我們得到一序列整數點(u_k,v_k)爲：

$(2,1),(5,3),(7,4),(19,11),$
$(26,15),(71,41),(97,56),\cdots\cdots$

比較上面三種方法所得的結果，發現下列現象：

1.方法㈠≻方法㈡≻方法㈢。（“≻”表示“逼近的速度快於”）。

2.$\langle a_k\rangle$是$\langle b_k\rangle$的子列，而$\langle b_k\rangle$又是$\langle c_k\rangle$的子列。

3.點(p_k,q_k)與點(x_k,y_k)均位在曲線$x^2-3y^2=1$上，而點(u_{2k-1},v_{2k-1})位在$x^2-3y^2=1$上，但是(u_{2k},v_{2k})則位在曲線$x^2-3y^2=-2$上。

我們問：上面所敘的現象，對一般的$\sqrt{\alpha}$（α是非完全平方的正整數）也會成立嗎？爲什麼？

二、$\sqrt{\alpha}$的近似分數

1.牛頓法求$\sqrt{\alpha}$的近似值：

在x軸上取點$p_1(a_1,0)$，其中a_1爲一有理數，滿足$a_1^2>\alpha$（圖1），過P_1沿y軸方向作直線交曲線$C:y=x^2-\alpha$於點Q_1，過

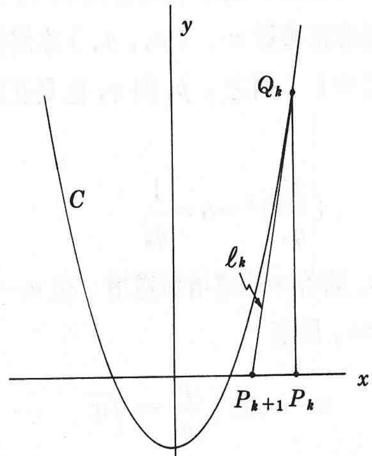

圖 1

Q_1作C之切線ℓ_1（斜率爲$2a_1$），ℓ_1與x軸之交點令爲P_2，其坐標記爲$(a_2,0)$；又過P_2沿y軸方向作直線交C於點Q_2，過Q_2又作C之切線ℓ_2（斜率爲$2a_2$），ℓ_2與x軸之交點令爲P_3，其坐標記爲$(a_3,0)$，如此繼續進行，依序得到點列：$P_1,P_2,\cdots\cdots,P_k,\cdots$及切線列：$\ell_1,\ell_2,\cdots\cdots,\ell_k,\cdots\cdots$。$P_k$的坐標爲$(a_k,0)$，$\ell_k$的斜率爲$2a_k$。

a_k與a_{k+1}的關係爲

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{\alpha}{a_k}\right)$$

因爲a_1是有理數，所以$a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$均爲有理數。

把a_k表爲分數$\dfrac{p_k}{q_k}$（$p_k,q_k\in N$）時，

$$\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{\alpha}{a_k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p_k}{q_k}+\frac{\alpha q_k}{p_k}\right)$$
$$=\frac{p_k^2+\alpha q_k^2}{2p_kq_k}$$

取 $\begin{cases} p_k^2+\alpha q_k^2=p_{k+1} \\ 2p_kq_k=q_{k+1}\end{cases}$

則 $p_{k+1}^2-\alpha q_{k+1}^2$
$$=(p_k^2+\alpha q_k^2)^2-\alpha(2p_kq_k)^2$$
$$=(p_k^2-\alpha q_k^2)^2$$

因此，如果開始時所取之 $a_1=\frac{p_1}{q_1}$ 滿足 $p_1^2-\alpha q_1^2=1$ 的話（此時，顯然 p_1 與 q_1 互質），則對任意正整數 n，(p_n,q_n) 亦將滿足 $p_n^2-\alpha q_n^2=1$（因之，p_n 與 q_n 也是互質），隨之有

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2-\alpha=\frac{1}{q_n^2}$$

由於 q_n 隨著 n 的遞增而遞增，在 $n\to\infty$ 時，$q_n\to\infty$，因而

$$n\to\infty\text{時，}\frac{p_n}{q_n}\to\sqrt{\alpha}$$

以上的意思就是說：如果我們在雙曲線 Γ：$x^2-\alpha y^2=1$ 上取點 (p_1,q_1) 出發，則由牛頓法逐次取得之整數點 (p_2,q_2)，(p_3,q_3)，……是沿着 Γ 而逐漸接近直線 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$。

2.第二法求 $\sqrt{\alpha}$ 的近似值：

在 x 軸上取點 $P_1'=(a_1',0)$，其中 a_1' 為一有理數，滿足 $a_1'^2>\alpha$（圖2），過 P_1' 沿 y 軸方向作直線交曲線 C：$y=x^2-\alpha$ 於點 Q_1'，過 Q_1' 作直線 ℓ_1'（斜率為 $a_1'+a_1'$），ℓ_1' 與 x 軸之交點令為 P_2'，其坐標記為 $(a_2',0)$；又過 P_2' 沿 y 軸方向作直線交 C 於點 Q_2'，過 Q_2' 作直線 ℓ_2'（斜率為 $a_2'+a_1'$），ℓ_2' 與 x 軸之交點令為 P_3'，其坐標記為 $(a_3',0)$，如此繼續進行，依序得到點列：P_1'，P_2'，……，P_k'，……及直線列 ℓ_1'，ℓ_2'，……，ℓ_k'，……。P_k' 的坐標為 $(a_k',0)$，ℓ_k' 的斜率為 $a_k'+a_1'$。

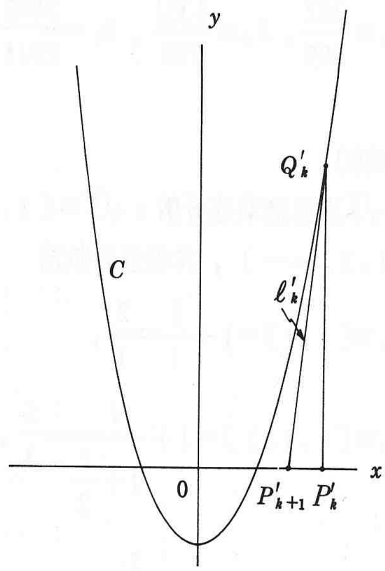

圖 2

ℓ_k' 的方程式為

$$y-a_k'^2+\alpha=(a_k'+a_1')(x-a_k')$$

它在 x 軸的截距就是

$$a_{k+1}'=a_k'+\frac{-a_k'^2+\alpha}{a_k'+a_1'}=\frac{a_k'a_1'+\alpha}{a_k'+a_1'}$$

因為 a_1' 是有理數，所以 a_2'，a_3'，……，a_n' 均為有理數。

把 a_k' 表為分數 $\frac{x_k}{y_k}$（x_k，$y_k\in N$）時，

$$\frac{a_k'a_1'+\alpha}{a_k'+a_1'}=\frac{\frac{x_k}{y_k}\cdot\frac{x_1}{y_1}+\alpha}{\frac{x_k}{y_k}+\frac{x_1}{y_1}}=\frac{x_kx_1+\alpha y_ky_1}{x_ky_1+y_kx_1}$$

取 $\begin{cases} x_kx_1+\alpha y_ky_1=x_{k+1} \\ x_ky_1+y_kx_1=y_{k+1}\end{cases}$

則有

(i) $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$，$n$ 為任意正整數。

證明：用數學歸納法。

$n=1$ 時，顯然成立。

假設 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^k=x_k+y_k\sqrt{\alpha}$

則 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^{k+1}$
$$=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^k(x_1+y_1\sqrt{\alpha})$$
$$=(x_k+y_k\sqrt{\alpha})(x_1+y_1\sqrt{\alpha})$$

$=(x_k x_1+\alpha y_k y_1)+(x_k y_1+y_k x_1)\sqrt{\alpha}$

$=x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{\alpha}$

(ii) 由 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$

可推知 $(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n-y_n\sqrt{\alpha}$

以上二式相乘得到 $x_n^2-\alpha y_n^2=(x_1^2-\alpha y_1^2)^n$。因此，如果開始時所取之 $a_1'=\dfrac{x_1}{y_1}$ 滿足 $x_1^2-\alpha y_1^2=1$ 的話（此時，顯然 x_1 與 y_1 互質），則對任意正整數 n，(x_n, y_n) 亦滿足 $x_n^2-\alpha y_n^2=1$（因之，x_n 與 y_n 也是互質），隨之有

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2-\alpha=\frac{1}{y_n^2}$$

因而在 $n\to\infty$ 時，$\dfrac{x_n}{y_n}\to\sqrt{\alpha}$

因此，如果我們在雙曲線 Γ：$x^2-\alpha y^2=1$ 上取點 (x_1, y_1) 出發，則由第二法逐次取得之整數點 (x_2, y_2)，(x_3, y_2)，…… 是沿着 Γ 而逐漸接近直線 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$。

3.兩種方法的比較：

(i) 假定在牛頓法中所取的點 P_1 與在第二法中所取的點 P_1' 是相同的，即 $a_1=a_1'$，則有點 $Q_1\equiv$ 點 Q_1'，直線 $\ell_1\equiv$ 直線 ℓ_1'，隨之點 $P_2\equiv$ 點 P_2'，$a_2=a_2'$，但由 $a_2<a_1$，推得 $2a_2<a_2+a_1$，也就是 ℓ_2 的斜率 $<\ell_2'$ 的斜率，所以點 P_3 應比點 P_3' 更接近點 $R(\sqrt{\alpha}, 0)$。（見圖3）

實際上，

$a_2<a_1$

$\Rightarrow 2a_2<a_2+a_1$

$\Rightarrow \ell_2$ 的斜率 $<\ell_2'$ 的斜率

$\Rightarrow a_3<a_3'$

$\Rightarrow 2a_3<a_3'+a_1$

$\Rightarrow \ell_3$ 的斜率 $<\ell_3'$ 的斜率

$\Rightarrow a_4<a_4'$

⋮

$\Rightarrow a_k<a_k'$

$\Rightarrow 2a_k<a_k'+a_1$

$\Rightarrow \ell_k$ 的斜率 $<\ell_k'$ 的斜率

$\Rightarrow a_{k+1}<a_{k+1}'$

⋮

也就是說，從相同的出發點，牛頓法≻第二法。

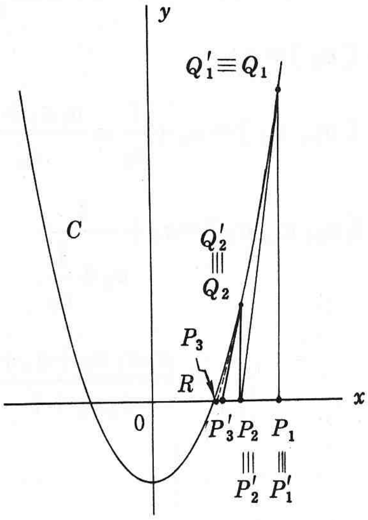

圖 3

(ii) 在牛頓法中，

$$\begin{cases} p_{k+1}=p_k^2+\alpha q_k^2 \\ q_{k+1}=2p_k q_k \end{cases}$$

因此 $p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{\alpha}=(p_k+q_k\sqrt{\alpha})^2$

所以有 $p_2+q_2\sqrt{\alpha}=(p_1+q_1\sqrt{\alpha})^2$

$p_3+q_3\sqrt{\alpha}=(p_2+q_2\sqrt{\alpha})^2$

$=(p_1+q_1\sqrt{\alpha})^4$

$p_4+q_4\sqrt{\alpha}=(p_3+q_3\sqrt{\alpha})^2$

$=(p_1+q_1\sqrt{\alpha})^8$

⋮

一般 $p_n+q_n\sqrt{\alpha}=(p_1+q_1\sqrt{\alpha})2^{n-1}$

即是說，從相同的近似分數 $\dfrac{x_1}{y_1}=a_1=\dfrac{p_1}{q_1}$（$x_1=p_1$，$y_1=q_1$）出發，如果利用第二法所得之 $\sqrt{\alpha}$ 的近似數列爲：a_1，a_2，a_3，a_4，……，a_n 的話，則利用牛頓法所得之 $\sqrt{\alpha}$ 的近似數列爲 $\langle a_n\rangle$ 的子列：a_1，a_2，a_4，a_8，……，$a_{2^{k-1}}$，……。

4. $\sqrt{\alpha}$的連分數表式

(i) $\sqrt{\alpha}$可以表爲一個循環連分數〔a_0, a_1, a_2, ……, a_n, ……〕，將有限連分數〔a_0, a_1, a_2, ……, a_n〕記爲$\frac{u_n}{v_n}$。

$$[a_0]=a_0$$

$$[a_0, a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_1a_0+1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_2a_1a_0+a_2+a_0}{a_2a_1+1}$$

$$\vdots$$

於是有 $u_1=a_1a_0+1$，$v_1=a_1$

$u_2=a_2u_1+a_0$，$v_2=a_2v_1+1$

如果令 $u_0=a_0$，$v_0=1$

則一般有：

$$u_k=a_ku_{k-1}+u_{k-2},$$
$$v_k=a_kv_{k-1}+v_{k-2},$$
$$k\in N,\ k\geqslant 2$$（註1）

(ii) 在前節 (i) 中，$\frac{u_k}{v_k}$是$\sqrt{\alpha}$的漸近分數，它們會滿足下面兩件事：

(1) $n\to\infty$時，$\frac{u_n}{v_n}\to\sqrt{\alpha}$。

(2)存在一組正整數（u_k, v_k），它是$x^2-\alpha y^2=1$的解（註2）。

把(2)中所提的解取其最小者，作爲是牛頓法中的（p_1, q_1）或是第二法中的（x_1, y_1），如此一來，我們便能夠確確實實從曲線Γ：$x^2-\alpha y^2=1$上的正整數點（p_1, q_1）（即是（x_1, y_1））出發，沿着Γ逐步取得一序列整數點（p_2, q_2），（p_3, q_3），……（或是（x_2, y_2），（x_3, y_3），……），這些點是一點比一點更接近直線L：$x-\sqrt{\alpha}y=0$，而相對的，分數$\frac{p_k}{q_k}$（或是$\frac{x_k}{y_k}$）也就一個比一個更逼近$\sqrt{\alpha}$。

(iii) 當我們從滿足$x^2-\alpha y^2=1$的整數點（x_1, y_1）出發，逐次取得的整數點（x_2, y_2），（x_3, y_3），……，（x_k, y_k），……，由節二之2-(ii) 知滿足$x_k^2-\alpha y_k^2=1$，也就是滿足$|x_k^2-\alpha y_k^2|=1<\sqrt{\alpha}$，因而這些分數$\frac{x_k}{y_k}$也必是$\sqrt{\alpha}$的漸近分數（註3）。

這就說明了，從滿足$x^2-\alpha y^2=1$的整數點（x_1, y_1）=（p_1, q_1）出發，採牛頓法所取得的整數點（p_k, q_k）集或是第二法所取得的整數點（x_k, y_k）集，都將是採第三法（也就是用$\sqrt{\alpha}$的漸近分數）所取得之整數點（u_k, v_k）集的子集。

三、$X^2-\alpha Y^2=1$ (Pell's equation) 的正整數解

1.如果（x_1, y_1）是$x^2-\alpha y^2=1$的初始正整數解（即最小正整數解），則由第二法所逐次取得之整數對（x_1, y_1），（x_2, y_2），……，（x_k, y_k），……就是$x^2-\alpha y^2=1$的所有正整數解。

下面兩個定理，給出此一事實的證明。

定理1：

設α是非完全平方的正整數，且正整數對（x_1, y_1）滿足$x_1^2-\alpha y_1^2=1$，若正整數對（x_n, y_n）滿足$x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$，$n\in N$，則$x_n^2-\alpha y_n^2=1$。

證明：

由 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$

$\Rightarrow$ $x_n-y_n\sqrt{\alpha}=(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n$

以上二式相乘得

$$x_n^2-\alpha y_n^2=(x_1^2-\alpha y_1^2)^n=1$$

定理2：

設α是非完全平方的正整數，若數對

(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_k, y_k)，……是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的所有正整數解，其中 $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_k<\cdots\cdots$，且 $y_1<y_2<\cdots\cdots<y_k<\cdots\cdots$，則對任意正整數 n，恒有 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$。

證明：

(i) $(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n$

$=(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

$=[(x_nx_1-\alpha y_ny_1)+(y_nx_1-x_ny_1)\sqrt{\alpha}]\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

$=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1}$

（取 $\begin{cases} x_nx_1-\alpha y_ny_1=a_1 \\ y_nx_1-x_ny_1=b_1 \end{cases}$）

$=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2}$

$=[(a_1x_1-\alpha b_1y_1)+(b_1x_1-a_1y_1)\sqrt{\alpha}]\cdot(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2}$

$=(a_2+b_2\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2}$

（取 $\begin{cases} a_1x_1-\alpha b_1y_1=a_2 \\ b_1x_1-a_1y_1=b_2 \end{cases}$）

$\vdots$

$=(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})$

（取 $\begin{cases} a_{n-2}x_1-\alpha b_{n-2}y_1=a_{n-1} \\ b_{n-2}x_1-a_{n-2}y_1=b_{n-1} \end{cases}$）

我們得到整數列 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)，……，(a_{n-1}, b_{n-1})。

(ii) $a_1^2-\alpha b_1^2$

$=(x_nx_1-\alpha y_ny_1)^2-\alpha(y_nx_1-x_ny_1)^2$

$=(x_n^2-\alpha y_n^2)(x_1^2-\alpha y_1^2)$

$=1$

$a_2^2-\alpha b_2^2$

$=(a_1x_1-\alpha b_1y_1)^2-\alpha(b_1x_1-a_1y_1)^2$

$=(a_1^2-\alpha b_1^2)(x_1^2-\alpha y_1^2)$

$=1$

同理，我們得到 $a_3^2-\alpha b_3^2=a_4^2-\alpha b_4^2=\cdots\cdots=a_{n-1}^2-\alpha b_{n-1}^2=1$。

(iii) 由 $x_1^2-\alpha y_1^2=1$

$=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})$

知 $x_1-y_1\sqrt{\alpha}<1$

隨之，由

$(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})$

$=a_1+b_1\sqrt{\alpha}$

知 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}>a_1+b_1\sqrt{\alpha}$ …………①

另外，由

$x_n^2-\alpha y_n^2=1=a_1^2-\alpha b_1^2$

$\Rightarrow(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_n-y_n\sqrt{\alpha})$

$=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(a_1-b_1\sqrt{\alpha})$

便得 $x_n-y_n\sqrt{\alpha}<a_1-b_1\sqrt{\alpha}$

即 $-x_n+y_n\sqrt{\alpha}>-a_1+b_1\sqrt{\alpha}$ ……②

由①與②二式推知

$y_n>b_1$

再由 $x_n^2-\alpha y_n^2=a_1^2-\alpha b_1^2=1$

$\Rightarrow x_n^2-a_1^2=\alpha(y_n^2-b_1^2)$

推知 $x_n>a_1$

（$\begin{cases} a_1>0 \\ b_1>0 \end{cases}$ 可從下面第(iv)點得知）

同理，我們有

$\begin{cases} a_1>a_2 \\ b_1>b_2 \end{cases}$，$\begin{cases} a_2>a_3 \\ b_2>b_3 \end{cases}$，…，$\begin{cases} a_{n-2}>a_{n-1} \\ b_{n-2}>b_{n-1} \end{cases}$

(iv) 點 $H_1(x_1, y_1)$ 及點 $H_n(x_n, y_n)$ 落在雙曲線 Γ：$x^2-\alpha y^2=1$ 的第一象限部分，而直線 L：$x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 是 Γ 的一條漸近線，因此，

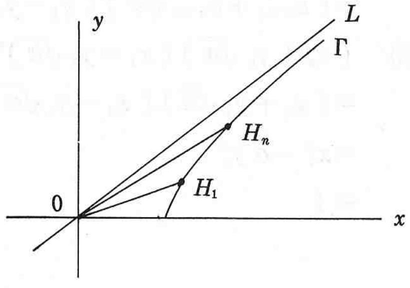

圖 4

L 的斜率 $>OH_n$ 的斜率 $>OH_1$ 的斜率，

即 $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}>\dfrac{y_n}{x_n}>\dfrac{y_1}{x_1}$

因此 $\begin{cases} \frac{1}{\alpha} > \frac{y_n}{x_n} \cdot \frac{y_1}{x_1} \\ y_n x_1 - x_n y_1 > 0 \end{cases}$

於是得到　$a_1 > 0$，$b_1 > 0$

但是已知（x_1，y_1）是 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的初始正整數解，

因此　$a_1 \geqslant x_1$，　$b_1 \geqslant y_1$。

同理，我們有

$$\begin{cases} a_2 \geqslant x_1 \\ b_2 \geqslant y_1 \end{cases}, \begin{cases} a_3 \geqslant x_1 \\ b_3 \geqslant y_1 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} a_{n-1} \geqslant x_1 \\ b_{n-1} \geqslant y_1 \end{cases}$$

綜合以上（i）、（ii）、（iii）及（iv）點，我們得到數對（a_{n-1}，b_{n-1}），（a_{n-2}，b_{n-2}），……，（a_1，b_1），它們都是 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的正整數解，且滿足

$$\begin{cases} x_1 \leqslant a_{n-1} < a_{n-2} < a_{n-3} < \cdots < a_2 < a_1 < x_n \\ y_1 \leqslant b_{n-1} < b_{n-2} < b_{n-3} < \cdots < b_2 < b_1 < y_n \end{cases}$$

但是已知數對（x_1，y_1），（x_2，y_2），…，（x_n，y_n）是 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的首 n 組正整數解，它們滿足

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n$$
$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots\cdots < y_{n-1} < y_n$$

因此而有

$$(a_1, b_1) = (x_{n-1}, y_{n-1}),$$
$$(a_2, b_2) = (x_{n-2}, y_{n-2}), \cdots\cdots,$$
$$(a_{n-1}, b_{n-1}) = (x_1, y_1)$$

從（i）

$$(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$$
$$= (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$$

得　$(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$

$$= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$$
$$= x_1^2 - \alpha y_1^2$$
$$= 1$$

但是

$$(x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n (x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n$$
$$= (x_1^2 - \alpha y_1^2)^n$$
$$= 1$$

故得

$$x_n + y_n\sqrt{\alpha} = (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n \text{。}$$

2. 運用軟體SYMPHONY找出 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的初始正整數解：

根據上面兩定理知道，欲找 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的正整數解，主要關鍵在找出它的初始正整數解（x_1，y_1），再經由 $x_k + y_k\sqrt{\alpha} = (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^k$，便可逐次找出所有解（$x_1$，$y_1$），（$x_2$，$y_2$），（$x_3$，$y_3$），……。運用 SYMPHONY的協助，我們容易找到這樣的初始解（註4）。在附表中，我們列出了 α 從 2至99 的 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的初始正整數解。

附　註

註1：參見凡異出版，華羅庚著數論導引，第十章，§1。

註2：同註1，第十章，§2～§9。

註3：同註1，第十章，§7。

註4：參見作者另文，"用軟體SYMPHONY協助求不定方程 $ax - by = 1$ 及 $x^2 - \alpha y^2 = 1$ 的正整數解"。

——本文作者任教於新竹科學園區實驗高中——

α	x	y	$x^2-\alpha y^2$
2	3	2	1
3	2	1	1
5	9	4	1
6	5	2	1
7	8	3	1
8	3	1	1
10	19	6	1
11	10	3	1
12	7	2	1
13	649	180	1
14	15	4	1
15	4	1	1
17	33	8	1
18	17	4	1
19	170	39	1
20	9	2	1
21	55	12	1
22	197	42	1
23	24	5	1
24	5	1	1
26	51	10	1
27	26	5	1
28	127	24	1
29	9801	1820	1
30	11	2	1
31	1520	273	1
32	17	3	1
33	23	4	1
34	35	6	1
35	6	1	1
37	73	12	1
38	37	6	1
39	25	4	1
40	19	3	1
41	2049	320	1
42	13	2	1
43	3482	531	1
44	199	30	1
45	161	24	1
46	24335	3588	1
47	48	7	1
48	7	1	1
50	99	14	1
51	50	7	1
52	649	90	1
53	66249	9100	1
54	485	66	1
55	89	12	1
56	15	2	1
57	151	20	1
58	19603	2574	1
59	530	69	1
60	31	4	1
61	1766319049	226153980	1
62	63	8	1
63	8	1	1
65	129	16	1
66	65	8	1
67	48842	5967	1
68	33	4	1
69	7775	936	1
70	251	30	1
71	3480	413	1
72	17	2	1
73	2281249	267000	1
74	3699	430	1
75	26	3	1
76	57799	6630	1
77	351	40	1
78	53	6	1
79	80	9	1
80	9	1	1
82	163	18	1
83	82	9	1
84	55	6	1
85	285769	30996	1
86	10405	1122	1
87	28	3	1
88	197	21	1
89	500001	53000	1
90	19	2	1
91	1574	165	1
92	1151	120	1
93	12151	1260	1
94	2143295	221064	1
95	39	4	1
96	49	5	1
97	62809633	6377352	1
98	99	10	1
99	10	1	1

附註： 從表中可以發現：

(1) $a=n^2-1$ 時，初始解爲 $(n, 1)$。 (2) $a=n^2-2$ 時，初始解爲 (n^2-1, n)。

(3) $a=n^2+n$ 時，初始解爲 $(2n+1, 2)$。 其中 $n\in N$，$n\geqslant 2$