極座標系統中交點的困擾

林大風
邱炘正

一、問題：

設E_1及E_2爲x，y 直角座標系中的兩個方程式。令G_1及G_2分別爲E_1和E_2的圖形。則(a, b)爲聯立方程式E_1，E_2的解的充要條件爲$(a, b) \in G_1 \cap G_2$。這是大家所熟知的性質。例如

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{及} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

爲聯立方程式

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

的解。而$(1, -1)$及$(4, 2)$ 則爲此二方程式的圖形的交點（見圖1）。

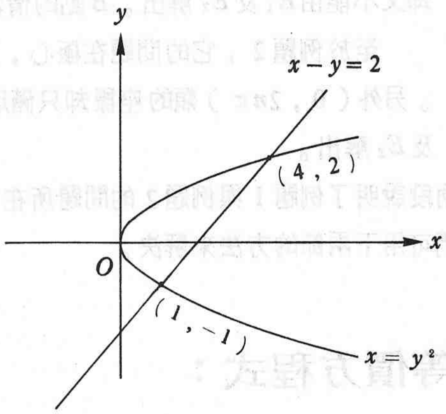

圖 1

上述的性質在極座標系統中是否也成立呢？讓我們先看看下面的兩個例子。

例題1：試求方程式

$$\begin{cases} r = -1 + \cos\theta \cdots\cdots E_1 \\ r = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots E_2 \end{cases}$$

的圖形的交點。

解：由E_1與E_2得

$1 = -1 + \cos\theta$ 或 $2 = \cos\theta$

因此這組聯立方程式無解。難道他們的圖形不相交嗎？其實他們有兩個交點A及B（見圖2）。但是爲

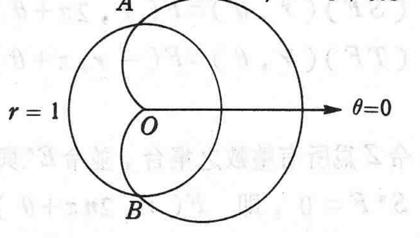

圖2

什麼無法從E_1及E_2來解出A與B的座標呢？

例題 2：試求方程式

$$\begin{cases} r=\cos\theta \cdots\cdots E_1 \\ r=\sin\theta \cdots\cdots E_2 \end{cases}$$

的圖形的交點。

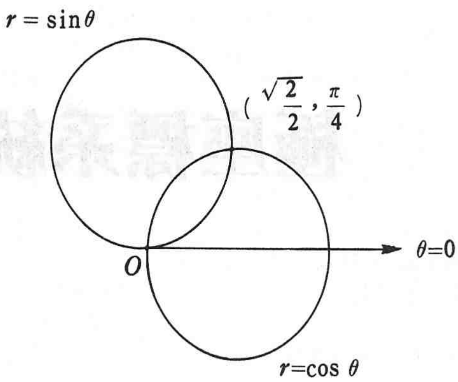

圖 3

解：解E_1及E_2得

$$\cos\theta=\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

若n為偶數，則

$$r=\cos(n\pi+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

若n為奇數，則

$$r=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

但是$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4})$和$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{4})$在極座標平面上代表同一點。因此我們只求出一個交點的座標！因為E_1和E_2的圖形都是經極心O的圓，所以極心O亦為一交點（見圖 3）。為什麼我們無法從E_1及E_2來解出極心的座標呢？

現在來找出上述兩個問題的癥結。在例題 1 中，A有$(1, 2n\pi+\frac{\pi}{2})$及$(-1, 2n\pi-\frac{\pi}{2})$兩類座標。前者滿足$E_2$而不滿足$E_1$，後者滿足$E_1$而不滿足$E_2$。因此雖然$A$為一交點卻又不能由$E_1$及$E_2$解出。$B$點的情況也類似。

至於例題 2，它的問題在極心，極心$(0, 2n\pi+\frac{\pi}{2})$類的座標滿足E_1而不滿足E_2。另外$(0, 2n\pi)$類的座標卻只滿足E_2而非E_1，因此雖然極心O為一交點卻無法由E_1及E_2解出。

前兩段說明了例題 1 與例題 2 的問題所在。但是以後若遇到極座標方程式時，應該怎樣來處理呢？我們可用下兩節的方法來解決。

二、等價方程式：

對r與θ的函數F，定義算子S與T如下：

$$(SF)(r,\theta)=F(r,2\pi+\theta),\ (S^0F)=F,$$
$$(TF)(r,\theta)=F(-r,\pi+\theta),\ (T^0F)=F。$$

定義 1：令Z為所有整數之集合，並令E^n與E_n分別為

$$S^nF=0，即\quad F(r,2n\pi+\theta)=0, \qquad n\in Z$$
$$S^nTF=0 \qquad F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=0$$

之方程式，這些方程式互稱為等價方程式。

例題 3：試求(a) $r+2-\cos\theta=0$，(b) $r-5\cos\theta=0$，之等價方程式。

解：(a)此時 $F(r,\theta)=r+2-\cos\theta$，

$F(r,2n\pi+\theta)=r+2-\cos(2n\pi+\theta)=0 \Rightarrow r+2-\cos\theta=0$。

$F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=-r+2-\cos(2n\pi+\pi+\theta)=0 \Rightarrow -r+2+\cos\theta=0$。

故 $\begin{cases} r+2-\cos\theta=0 \\ r-2-\cos\theta=0 \end{cases}$ 互為等價方程式。

(b)此時 $F(r,\theta)=r-5\cos\theta$，

$F(r,2n\pi+\theta)=r-5\cos(2n\pi+\theta)=0 \Rightarrow r-5\cos\theta=0$，

$F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=-r-5\cos(2n\pi+\pi+\theta)=0 \Rightarrow -r+5\cos\theta=0$。

故 $r-5\cos\theta=0$ 沒有其他不同之等價方程式。

例題 4：試求(a) $r+1-\cos\theta=0$，(b) $r=1$ 之等價方程。

解：(a)此時 $F(r,\theta)=r+1-\cos\theta$，

$F(r,2n\pi+\theta)=r+1-\cos(2n\pi+\theta)=0 \Rightarrow r+1-\cos\theta=0$

$F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=-r+1-\cos(2n\pi+\pi+\theta)=0 \Rightarrow r-1-\cos\theta=0$

故 $\begin{cases} r+1-\cos\theta=0 \\ r-1-\cos\theta=0 \end{cases}$ 互為等價方程。

(b)同法可得

$\begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}$ 互為等價方程。

例題 5：試求(a) $r-\cos\theta=0$，(b) $r-\sin\theta=0$ 之等價方程。

解：(a)此時 $F(r,\theta)=r-\cos\theta$

$F(r,2n\pi+\theta)=r-\cos(2n\pi+\theta)=0 \Rightarrow r-\cos\theta=0$。

$F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=-r-\cos(2n\pi+\pi+\theta)=0 \Rightarrow r-\cos\theta=0$。

故原方程沒有其他不同的等價方程式。

(b)此時 $F(r,\theta)=r-\sin\theta$，

$F(r,2n\pi+\theta)=r-\sin(2n\pi+\theta)=0 \Rightarrow r-\sin\theta=0$。

$F(-r,(2n+1)\pi+\theta)=-r-\sin(2n\pi+\pi+\theta)=0 \Rightarrow -r+\sin\theta=0$。

故原方程式亦沒有其他不同之等價方程式。

例題 6：$\begin{cases} r+\sin 2\theta=0 \\ r-\sin 2\theta=0 \end{cases}$ 互為等價方程式。

解：請讀者自導。

定理 1：等價方程式之圖形皆相同

證明：設 E 為原方程式 $F(r,\theta)=0$，E^n，E_n，$n\in Z$，

$$\begin{cases} F(r, 2n\pi+\theta)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots E^{n} \\ F(-r, (2n+1)\pi+\theta)=0 \cdots\cdots\cdots E_{n} \end{cases}$$

爲等價方程式。並令G，G^{n}，G_{n}分別爲方程式E，E^{n}，E_{n}之圖形。則

$$P\in G \Longleftrightarrow P\text{的某組座標}(r_0, \theta_0)\text{滿足}F(r_0, \theta_0)=0$$

$$\swarrow\!\!\nearrow \qquad\qquad\qquad\qquad \nwarrow\!\!\searrow$$

$$F(r_0, 2n\pi+(-2n\pi+\theta_0))=0 \qquad F(-(-r_0), (2n+1)\pi+(-2n\pi-\pi+\theta_0))=0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(r_0, -2n\pi+\theta_0)\text{滿足} \qquad (-r_0, -(2n+1)\pi+\theta_0)\text{滿足}$$

$$F(r, 2n\pi+\theta)=0 \qquad F(-r, (2n+1)\pi+\theta)=0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(r_0, -2n\pi+\theta_0)\text{滿足}E^{n} \qquad (-r_0, -(2n+1)\pi+\theta_0)\text{滿足}E_{n}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$P\in G^{n}\text{。} \qquad\qquad P\in G_{n}\text{。}$$

以上推導對任意的$n\in Z$皆成立。因此所有的等價方程式的圖形皆相同。

例題7：$\begin{cases} r\pm\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \\ r\pm\cos\dfrac{\theta}{2}=0 \end{cases}$ 互爲等價方程式。

解：請讀者自導。圖形請見圖4。

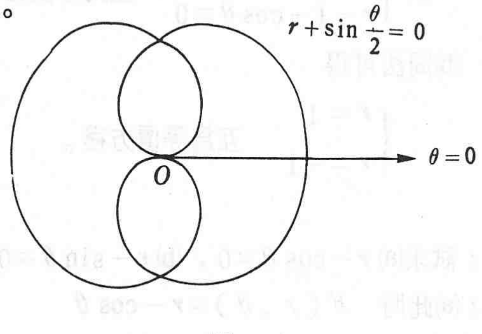

圖4

定理2：設G爲方程式E：$F(r, \theta)=0$之圖形，$P\in G$。若(r_0, θ_0)爲P之某組座標，則(r_0, θ_0)必滿足某個等價方程。

證明：$P\in G \Rightarrow P$之某組座標滿足方程式E。即存在某n_0使

$(r_0, 2n_0\pi+\theta_0)$滿足E 或 $(-r_0, (2n_0+1)\pi+\theta_0)$滿足$E$

$\Rightarrow F(r_0, 2n_0\pi+\theta_0)=0$ 或 $F(-r_0, (2n_0+1)\pi+\theta_0)=0$

$\Rightarrow (r_0, \theta_0)$滿足$E^{n_0}$ 或 (r_0, θ_0)滿足E_{n_0}。

例題8：令G爲方程式E：$r=-1+\cos\theta$之圖形，A：$(1, \frac{\pi}{2})$（參見例題1）。則$A\in G$。雖然$(1, \frac{\pi}{2})$不滿足E。但是$(1, \frac{\pi}{2})$却滿足E的等價方程式（見例題4(a)）

$$r-1-\cos\theta=0\text{。}$$

定理3：設方程式$\begin{cases} E: E(r, \theta)=0 \\ F: F(r, \theta)=0 \end{cases}$之等價方程爲$\begin{cases} E_i(r, \theta)=0, & 1\le i\le k \\ F_j(r, \theta)=0, & 1\le j\le \ell \end{cases}$，

其圖形爲$\begin{cases} G_E \\ G_F\text{。} \end{cases}$

則對任意固定的 $i_0, 1 \leq i_0 \leq k$ ，下列方程式

$$\begin{cases} E_{i_0}(r, \theta)=0 \\ F_j(r, \theta)=0 \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

的解的聯集爲 $G_E \cap G_F$ 各點之座標，但極心可能例外。

證明：(i)設 (r_0, θ_0) 爲某組 $\begin{cases} E_{i_0}(r,\theta)=0 \\ F_j(r,\theta)=0 \end{cases}$ 之解，由定理 1 知

$$(r_0, \theta_0) \in \begin{cases} G_E \\ G_F \end{cases} \Rightarrow (r_0, \theta_0) \in G_E \cap G_F 。$$

(ii) 反之，設 $P_0 \in G_E \cap G_F$, $P_0 \neq$ 極心，則

$P_0 \in G_E \Rightarrow P_0 \in \{E_{i_0}(r, \theta)=0$ 之圖形$\}$ (由定理1)

$\Rightarrow P_0$ 之某組座標 (r_0, θ_0) 滿足 $E_{i_0}(r, \theta)=0$ (定義)。

又 $P_0 \in G_F$, (r_0, θ_0) 爲 P_0 之一組座標，由定理 2 知 (r_0, θ_0) 滿足某 $F_{j_0}(r, \theta)=0$ 。故 (r_0, θ_0) 爲

$$\begin{cases} E_{i_0}(r, \theta)=0 \\ F_{j_0}(r, \theta)=0 \end{cases}$$

之解。

由 (i) 及 (ii) 知定理 3 所述成立。

三、例題：

我們可用定理 3 來解釋例題 1。

例題 1：試求方程式 $\begin{cases} E: r=-1+\cos\theta \\ F: r=1 \end{cases}$ 的圖形的交點。

解：由例題 4 知 E 和 F 的等價方程式爲

$$\begin{cases} r=-1+\cos\theta \cdots\cdots\cdots E_1 \\ r=1+\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots E_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} r=1 \cdots\cdots\cdots\cdots F_1 \\ r=-1 \cdots\cdots\cdots F_2 \end{cases}$$

解 $\begin{cases} E_1 \\ F_1 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} E_1 \\ F_2 \end{cases}$ 可得 $\phi \cup \{(-1, \frac{\pi}{2}), (-1, -\frac{\pi}{2})\} = \{A, B\}$

或由 $\begin{cases} E_2 \\ F_1 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} E_2 \\ F_2 \end{cases}$ 得 $G_E \cap G_F = \{(1, \frac{\pi}{2}), (1, -\frac{\pi}{2})\} \cup \phi = \{A, B\}$

亦可由 $\begin{cases} F_1 \\ E_1 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} F_1 \\ E_2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} F_2 \\ E \end{cases}$ 及 $\begin{cases} F_2 \\ E_2 \end{cases}$ 解出。

例題 9：試求 $\begin{cases} E: r+\dfrac{1}{2}=0 \\ F: r+\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \end{cases}$ 之圖形之交點(不含極心)。

解：由例題 4 (a)及例題 7 知E和F的等價方程式爲

$$\begin{cases} E_1: r+\dfrac{1}{2}=0 \\ E_2: r-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} F_1: r+\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \\ F_2: r-\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \\ F_3: r+\cos\dfrac{\theta}{2}=0 \\ F_4: r-\cos\dfrac{\theta}{2}=0 \text{。} \end{cases}$$

解 $\begin{cases} F_1 \\ E_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} F_1 \\ E_2 \end{cases}$。

$$\begin{cases} r+\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \\ r+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r+\sin\dfrac{\theta}{2}=0 \\ r-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$r=-\frac{1}{2},\ \theta=\pi\pm\frac{2}{3}\pi \qquad r=\frac{1}{2},\ \theta=-\pi\pm\frac{2}{3}\pi \text{。}$$

因此圖形有 4 個交點$\left(\dfrac{1}{2}, -\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2}, \pi\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$。此四點爲圖 4 之圖形$G_F$與以極心$O$爲圓心，以$\dfrac{1}{2}$爲半徑之圓$G_E$之交點。

例題10：試求 $\begin{cases} E: r+2-\cos\theta=0 \\ F: r-5\cos\theta=0 \end{cases}$ 之圖形之交點（不包極心）。

解：由例題 3 知F沒有其他不同之等價方程式，而E之等價方程式爲

$$\begin{cases} E_1: r+2-\cos\theta=0 \\ E_2: r-2-\cos\theta=0 \text{。} \end{cases}$$

利用定理 3，我們只需解 $\begin{cases} E_1 \\ F \end{cases}$ 或 $\begin{cases} E_2 \\ F \end{cases}$

由 $\begin{cases} E_2 \\ F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r-2-\cos\theta=0 \\ r-5\cos\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta=\pm\dfrac{\pi}{3},\ r=\dfrac{5}{2}$，

故交點爲$\left(\dfrac{5}{2}, \pm\dfrac{\pi}{3}\right)$。

四、極心的問題：

上兩節所討論的交點把極心除外。對於要檢驗極心是否爲一交點時，我們可用下一定理。

定理 4：設圖形 $\begin{cases} G_f \\ G_g \end{cases}$ 爲聯立方程式 $\begin{cases} r=f(\theta) \\ r=g(\theta) \end{cases}$ 之圖形，

如果$f(\theta)=0$ 有解，$g(\theta)=0$ 亦有解，則極心$O\in G_f\cap G_g$。

證明：設 $\begin{cases}\alpha \text{ 爲 } f(\theta)=0 \text{ 之一解}\\ \beta \text{ 爲 } g(\theta)=0 \text{ 之一解}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(0,\alpha)\in G_f\\ (0,\beta)\in G_g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}O\in G_f\\ O\in G_g\end{cases} \Rightarrow O\in G_f\cap G_g$。

例題 2：試求方程式 $\begin{cases}E: r=\cos\theta\\ F: r=\sin\theta\end{cases}$ 之圖形之交點。

解：此時 $f(\theta)=\cos\theta$，$g(\theta)=\sin\theta$ 而

$\begin{matrix}\cos\theta=0\\ \sin\theta=0\end{matrix}$ 有解 $\begin{matrix}\theta=\dfrac{\pi}{2},\\ \theta=0\end{matrix}$。

因此極心O爲兩個圖形之一交點。至於極心以外之交點，由例題5知E和F沒有其他不同之等價方程式，所以僅需解 $\begin{cases}E\\ F\end{cases}$。

從例題2知另有一交點$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$。因此兩圖形之交點爲極心$O$與$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$。

例題11：試求 $\begin{cases}E: r=1+\cos\theta\\ F: r=1-\cos\theta\end{cases}$ 之圖形之交點。

解：因爲 $\begin{cases}1+\cos\theta=0 & \text{有解}\ \theta=\pi\\ 1-\cos\theta=0 & \text{有解}\ \theta=0\end{cases}$，由定理4知極心$O$爲一交點。再導出$E$和$F$的等價方程式爲

$\begin{cases}E_1: r=1+\cos\theta\\ E_2: r=-1+\cos\theta\end{cases}$ $\begin{cases}F_1: r=1-\cos\theta\\ F_2: r=-1-\cos\theta\end{cases}$。

讓我們解

$$\begin{cases}E_1\\ F_1\end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases}E_1\\ F_2\end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases}r=1+\cos\theta\\ r=1-\cos\theta\end{cases} \qquad \begin{cases}r=1+\cos\theta\\ r=-1-\cos\theta\end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$r=1,\ \theta=\pm\frac{\pi}{2} \qquad r=0,\ \theta=\pi$$

（爲極心之兩座標）。

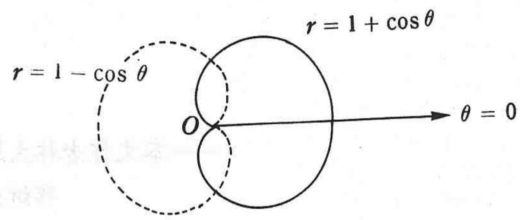

圖5：實線者爲G_E，虛線者爲G_F。

因此兩圖形之交點爲 極心O與$\left(1,\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$（請見圖5）。

例題11中的交點O（極心）可從解E和F的等價方程式得出。下面的例子裏，極心O也是交點，却不可從解等價方程式得到。

例題12：試求 $\begin{cases}E: r=-1+\cos\theta\\ F: r=1+2\cos\theta\end{cases}$ 之圖形之交點。

解：當 $r=0$ 時，$\begin{cases} -1+\cos\theta=0 & \text{有解} \quad \theta=0, \\ 1+2\cos\theta=0 & \text{有解} \quad \theta=\frac{2}{3}\pi, \end{cases}$

因此極心O爲兩圖形之一交點。另再導出E和F的等價方程式。它們分別爲

$\begin{cases} E_1: r=-1+\cos\theta \\ E_2: r=1+\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} F_1: r=1+2\cos\theta \\ F_2: r=-1+2\cos\theta \end{cases}$。

讓我們解

$\begin{cases} E_1 \\ F_1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} E_1 \\ F_2 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\begin{cases} r=-1+\cos\theta \\ r=1+2\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r=-1+\cos\theta \\ r=-1+2\cos\theta \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\cos\theta=-2$ $\cos\theta=0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

無解 $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$r=-1$。

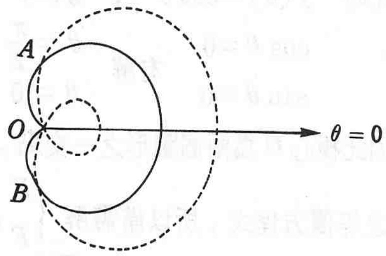

圖6 實線者爲G_E，虛線者爲G_F。

因此$G_E\cap G_F=\{O, A=(1, \frac{\pi}{2}), B=(1, -\frac{\pi}{2})\}$（請見圖6）

註1：本文大部份內容是依前作者在中央大學數學系所作之通俗演講講稿整理而得。

註2：本文題材部份取自“林大風著：大學微積分”。華泰書局出版第十一章。在這一章裡讀者尚可發現用等價方程式來討論極座標方程式圖形的對稱性。

——本文作者林大風為東吳大學數學系教授

邱炘正為東吳大學數學系助教——