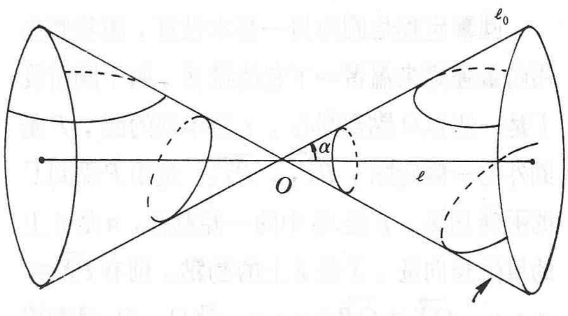
項武義先生演講

直線與圓（下）

第四節　錐線的影射性質

錐線（conics）乃是圓錐截線的簡稱，它們也就是通常在高中平面解析幾何中所討論的橢圓、雙曲線和拋物線，遠在二千多年前，古希臘的幾何學家如Menaechmus、Euclid、Archimedes、Apollonius、Pappus等都熱衷於研究錐線的幾何性質，而且獲得深刻的瞭解。錐線的原始定義就是用一個平面去截割一個正圓錐面所得的截痕（plane sections of a circular conic）如下圖所示：



圓錐面乃是一條直線ℓ_0繞着和它相交的另一直線ℓ爲軸旋轉而成者。設其夾角爲α，則一個不過兩線交點O（亦即錐頂）的平面π和上述圓錐面的交截線有下列三種類型，即當ℓ和π的夾角大於α時是橢圓型，ℓ和π的夾角$0\leq\theta\leq\alpha$時是雙曲型，而ℓ和π的夾角等於α時是拋物型，從射影幾何的觀點來看，它們都是圓的各種不同的透視投影。例如π_1是一個和軸線ℓ直交於O外一點的平面，則$\pi_1\cap\Gamma$是一個圓。設π_2是任給一個不過O點的平面，則$\pi_2\cap\Gamma$也就是$\pi_1\cap\Gamma$在透視投影$\pi_1 \underset{\wedge}{O} \pi_2$之下的像點點集，由此可見，在射影幾何的觀點之下，任何兩條（非蛻化的）錐線都是等價的。換句話說，在射影幾何中，各種各樣的錐線得到完全的統一；它們顯然具有完全一致的射影性質，錐線可以說是最簡單的射影曲線，它具有既簡潔又完美的射影性質。本節將擇其精要，略作介紹。

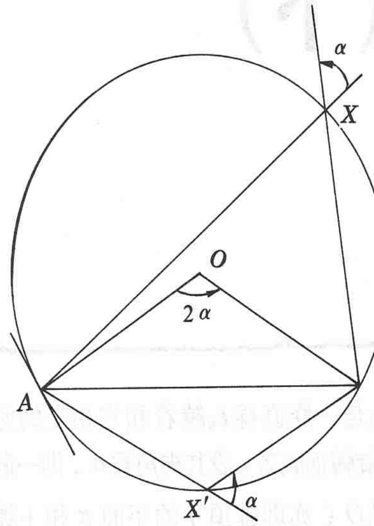
【分析】

從射影觀點來看，所有非蛻化的錐線都是和圓射影等價的，由此可見，錐線的射影性質

也就是圓的幾何性質中的射影不變者。因此我們要對於圓的幾何性質，徹底地作一次檢查其“射影不變性”的溫故知新工作，從中抽提其射影不變的成份。

【例1】 圓周角定理的射影成份

圓周角定理是圓的基本幾何性質，亦即如下圖所示，由直線 AX 轉向直線 BX 的夾角，是和圖上動點 X 的位置無關的一個常數。因爲



角度並非是射影不變的，所以它本身並不是一個射影幾何中的定理。但是稍加分析，則又可以發現它背後卻隱含着一個有趣的射影定理，茲分析如下：

設 A、B 是圓周上固定的兩點，X 是一個在圓周上移動的動點，令 $\mathscr{L}_A$、$\mathscr{L}_B$ 分別是由過 A、B 點的所有直線構成的線束（pencil of straight lines），則對應

$$\rho:\mathscr{L}_A\ni AX\rightarrow BX\in\mathscr{L}_B$$

就是一個把 $\mathscr{L}_A$ 映射到 $\mathscr{L}_B$ 的對應。〔註：AA 和 BB 分別定義爲該圓在 A、B 點的切線。〕我們可以採用斜率作爲 $\mathscr{L}_A$、$\mathscr{L}_B$ 這兩個線束的坐標。則圓周角定理也就是說兩個互相對應的直線，AX 和 BX，它們的斜率之間是具有下列斜率坐標關係式，即

$$\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}=\tan\alpha=C\text{（常數）}$$

其中 m_1、m_2 分別是 AX、BX 的斜率，解之即得變換式

$$m_2=\frac{C+m_1}{1-Cm_1}$$

亦即 m_2 是 m_1 的一個線性分式函數，用射影幾何的術語來說，就是 $\rho:\mathscr{L}_A\rightarrow\mathscr{L}_B$ 是一個射影對應！由此得見錐線的一個基本定理，它也就是圓周角定理的射影化。

定理1（Steiner）：在一個錐線 Γ 上取定相異兩點 A、B，令 X 爲 Γ 上的動點，則下述對應

$$\rho:\mathscr{L}_A\ni AX\rightarrow BX\in\mathscr{L}_B$$

是一個射影對應。反之，對於一個任給的射影對應

$$\widetilde{\rho}:\mathscr{L}_A\rightarrow\mathscr{L}_B$$

則 $\widetilde{\Gamma}=\{X=\ell\cap\widetilde{\rho}(\ell)\;;\;\ell\in\mathscr{L}_A\}$ 構成一個錐線。

【證明】

上述 Steiner 定理的前半就是圓周角定理的射影化。例 1 的分析其實業已證明了前半，茲再證明其後半如下：

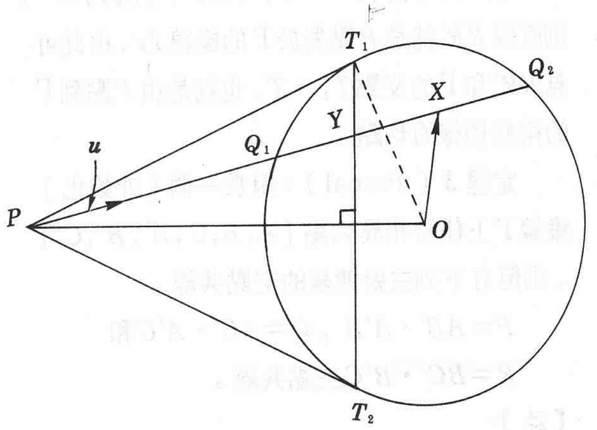
在 $\mathscr{L}_A$ 中取定三條直線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 使得

$$X_i=\ell_i\cap\widetilde{\rho}(\ell_i)\;,\;i=1\;,\;2\;,\;3$$

都和 A、B 點相異，令 $\widetilde{\Gamma}_1$ 爲過 A、B、X_1、X_2、X_3 這五點的那個唯一的錐線（五點定一錐線！）。對於 $\widetilde{\Gamma}_1$ 使用業已得證的前半，即得一個由 $\mathscr{L}_A$ 到 $\mathscr{L}_B$ 的射影對應，$\widetilde{\rho}_1$ 它在 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 這三條直線上的對應直線就是 $\widetilde{\rho}(\ell_1)$，$\widetilde{\rho}(\ell_2)$，$\widetilde{\rho}(\ell_3)$。因爲一個射影對應是由它在三處之“值”所唯一確定的，所以它就是 $\widetilde{\rho}$，換句話說 $\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}_1$，$\widetilde{\Gamma}=\widetilde{\Gamma}_1$。

【例2】 圓冪定理的射影成份

圓冪定理是圓的另一基本性質，讓我們先用向量運算來溫習一下它的證明，如下圖所設 Γ 是一個以 O 點爲圓心，r 爲半徑的圓，P 是圓外的一個定點，$\overline{PT_1}$，$\overline{PT_2}$ 是由 P 點到 Γ 的兩條切線，ℓ 是 $\mathscr{L}_P$ 中的一條動線，$\boldsymbol{u}$ 是 ℓ 上的單位長向量，X 是 ℓ 上的動點。則有 $\overrightarrow{PX}=x\cdot\boldsymbol{u}$，$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+x\cdot\boldsymbol{u}$。設 Q_1，Q_2 是割線



ℓ 和 Γ 的兩個交點 $\overrightarrow{PQ_i}=\lambda_i\cdot u$，$i=1$，$2$，則 λ_1、λ_2 就是下列方程式的兩個根，即

$$\begin{aligned} r^2 &= \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX} \\ &= (\overrightarrow{OP}+x\cdot u)\cdot(\overrightarrow{OP}+x\cdot u) \\ &= x^2+2(\overrightarrow{OP}\cdot u)x+|\overrightarrow{OP}|^2 \end{aligned}$$

由根與係數關係，即有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2} &= \lambda_1\cdot\lambda_2=|\overrightarrow{OP}|^2-r^2 \\ &= |\overrightarrow{PT_i}|^2, \\ \lambda_1+\lambda_2 &= -2(\overrightarrow{OP}\cdot u) \end{aligned}$$

令 Y 是 ℓ 上使得 $(PY;Q_1Q_2)=-1$ 的點，$\overrightarrow{PY}=y\cdot u$，由交叉比的定義，即有

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{y-\lambda_2}{y-\lambda_1}=-1\Rightarrow y=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

由此可得

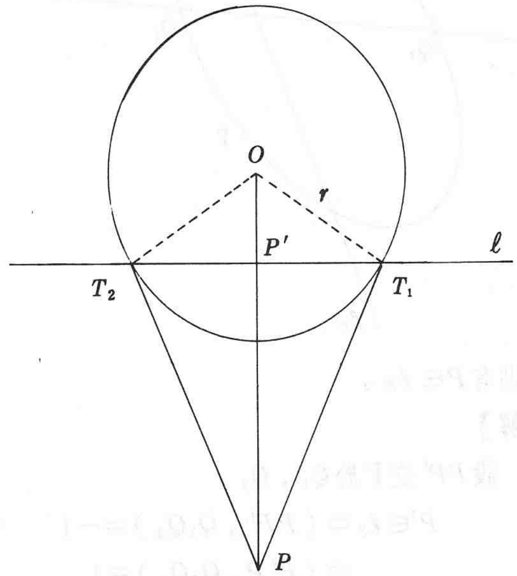
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PY}\cdot\overrightarrow{OP} &= \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,u\cdot\overrightarrow{OP}=-\lambda_1\lambda_2 \\ &= -|\overrightarrow{OP}|^2+r^2=\text{常數} \end{aligned}$$

上式的幾何意義就是：當 ℓ 在 $\mathscr{L}_P$ 中變動時，上述 Y 點在 OP 上的垂直投影不變！亦即 Y 位於直線 T_1T_2 之上。

因為切點，二個切點的連線和調和點列都是射影不變的！因此上述結果是對於任何（非蛻化）錐線都是普遍成立的一個射影性質。

定理 2：設 P 是錐線 Γ 之外任一定點，ℓ 是 $\mathscr{L}_P$ 中的動線，它和 Γ 交於兩點 Q_1，Q_2，在 ℓ 上取 Y 點使得 $(PY;Q_1Q_2)=-1$，則 Y 均位於一條定線之上，它叫做 P 點對於 Γ 的極線。

【例 3】 在 Γ 是一個以 O 點為圓心，r 為半徑的圓時，圓外一點 P 的極線 ℓ_P 是一條和 OP 垂直的直線，如下圖所示，其垂足 P' 滿足條件 $\overline{OP'}\cdot\overline{OP}=r^2$。



【證】

由上圖易見 $\Delta OT_1P\backsim\Delta OP'T_1$，由此即得

$$\begin{aligned} &\overline{OP}:\overline{OT_1}=\overline{OT_1}:\overline{OP'} \\ \Rightarrow &\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OT_1}^2=r^2 \end{aligned}$$

【例 3′】 一如上述例 3，但是 P 點位於圓內（例如上述中的 P' 點）。由圓 Γ 對於直線 OP 的反射對稱性易見 P 點之極線 ℓ_P 也是對於直線 OP 成反射對稱的，所以 $\ell_P\perp OP$。再者，ℓ_P 在 OP 線上的垂足依然滿足條件式

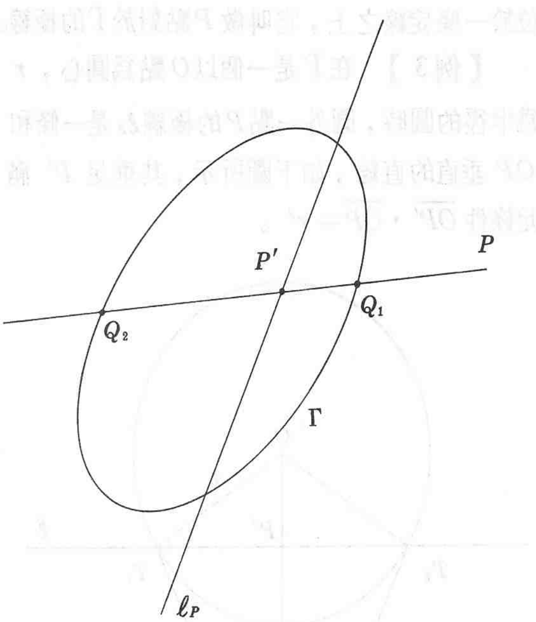
$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$$

【例 3″】 由例 3、3′ 可見，在 $P=$ 圓心 O 點的特殊情形，則 ℓ_P 就變成無窮遠直線 ℓ_∞；在 P_0 點位於圓上的特殊情形，則 ℓ_{P_0} 就變成 Γ 在 P_0 點的切線。

因為當 $P\to O$ 時，$|\overline{OP'}|=d(O,\ell_P)\to\infty$；

而當 $|\overline{OP}|\to r$（半徑）時，$|\overline{OP'}|\to r$ 而且恒保持 $\ell_P\perp OP$，所以 ℓ_P 的極限位置就是圓 Γ 在 P_0 點的切線。

【例 4】 對於任給的錐線 Γ，設 $P'\in\ell_P$



，則有 $P \in \ell_{P'}$。

【解】

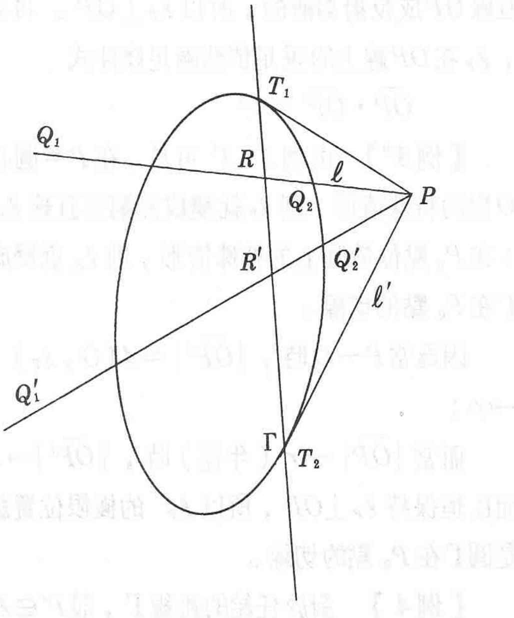
設 PP' 交 Γ 於 Q_1，Q_2

$$P' \in \ell_P \Rightarrow (PP',\, Q_1Q_2) = -1$$
$$\Rightarrow (P'P,\, Q_1Q_2) = 1$$
$$\Rightarrow P \in \ell_{P'}$$

【例5】 求作橢圓 Γ 的外部一點 P 到 Γ 的兩條切線。

【作法】

由 P 點引 Γ 的任取兩條割線 ℓ、ℓ'；分別交 Γ 於 Q_1、Q_2 和 Q_1'、Q_2'，然後再用連截作圖法求得 R、R' 點使得



$$(PR;\, Q_1Q_2) = -1,\ (PR';\, Q_1'Q_2') = -1$$

則直線 RR' 就是 P 點對於 Γ 的極線 ℓ_P，由此可見 RR' 和 Γ 的交點 T_1、T_2 也就是由 P 點到 Γ 的兩條切線的切點。

定理 3（Pascal）：對於一個（非蛻化）錐線 Γ 上任給相異六點 $\{A, B, C, A', B', C'\}$，則恒有下列三對連線的交點共線，

$P = AB' \cdot A'B$，$Q = AC' \cdot A'C$ 和

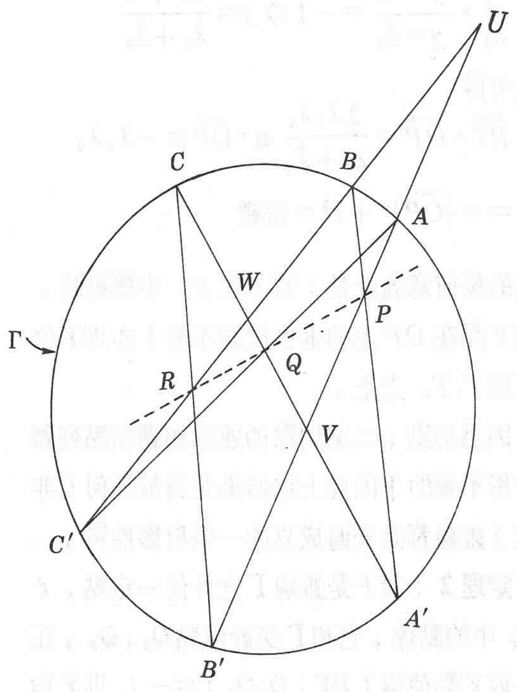
$R = BC' \cdot B'C$ 三點共線。

【註】

相交的兩條直線可以看成是一種蛻化的錐線，所以上述 Pascal 定理和前面所討論的 Pappus 定理是相當的二種情況。再者，上述定理是 Pascal 首先發現的，但是他當年所發表的證明業已失傳，下面將對它給出三種各具特色的證明，其中證一是最富於幾何色彩者；推想起來，它可能也是最接近於 Pascal 當年的證法者也。

【證一】

因爲所要證明的 Pascal 定理，所涉及的點線連結和交截都是射影不變的，所以是可以把它歸於圓這種特殊情形來加以論證的，如下圖所示，A, B, C, A', B', C' 是圓 Γ 上任給



相異六點，把上述幾何結構和Pappus 定理的證二相對比，我們也可以試用Menelaus 定理來推導P、Q、R三點共線，所以先得就地取材地選用一個P、Q、R分別居於其三邊之上的一個三角形，例如上圖所示的ΔUVW 就是一個"典型者"（亦即是三對交線中每對選用其一所構成的三角形）。

對於ΔUVW 和每對交線中的另一直線使用孟氏定理即有：

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{UB}}{\overrightarrow{BW}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{WA'}}{\overrightarrow{A'V}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{VP}}{\overrightarrow{PU}}=-1 \text{（}BA'\text{的交截）} \\ \dfrac{\overrightarrow{UC'}}{\overrightarrow{C'W}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{WQ}}{\overrightarrow{QV}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AU}}=-1 \text{（}AC'\text{的交截）} \\ \dfrac{\overrightarrow{UR}}{\overrightarrow{RW}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CV}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{VB'}}{\overrightarrow{B'U}}=-1 \text{（}CB'\text{的交截）} \end{cases}$$

再者，由A，B，C，A'，B'，C'共在圓Γ之上，即可由圓冪定理得出下述關係式，即

$$(**)\begin{cases} \overrightarrow{UB}\cdot\overrightarrow{UC'}=\overrightarrow{UA}\cdot\overrightarrow{UB'} \\ \overrightarrow{WB}\cdot\overrightarrow{WC'}=\overrightarrow{WC}\cdot\overrightarrow{WA'} \\ \overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VB'}=\overrightarrow{VA'}\cdot\overrightarrow{VC} \end{cases}$$

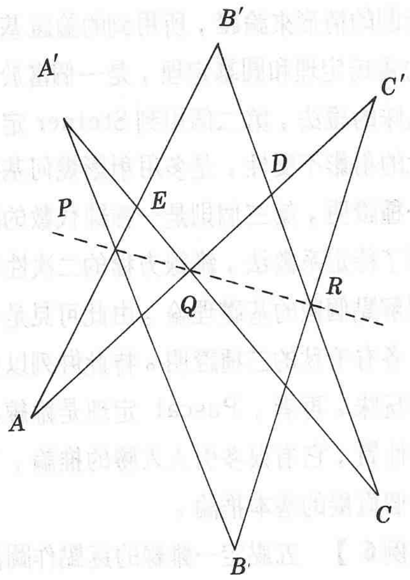
將(*)中的三式相乘，再用(**)中的三式就可以相消去所有不含有P、Q、R的因子，即得

$$\frac{\overrightarrow{VP}}{\overrightarrow{PU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UR}}{\overrightarrow{RW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WQ}}{\overrightarrow{QV}}=-1$$

由此再用孟氏定理即證得P、Q、R共線。

【證二】

由定理1得知直線束$A'B'$，$A'C$，$A'B$，$A'A$和直線束$C'B'$，$C'C$，$C'B$，$C'A$ 是互相射影對應的，由此可見點列$\{B',E,P,A\}$和點列$\{B',C,R,D\}$也是互相射影對應的，由於B' 點自相對應，所以它們之間的射影對應其實是一個透視投影，而這個透視中心必須就是EC和AD的交點Q，亦即P、Q、R三點必須共線。



【證三】

設錐線Γ的方程式是二次式$f=0$；而三對直線AB'，$A'B$；AC'，$A'C$；和BC'，$B'C$的方程式分別是一次式ℓ_1，ℓ_1'；ℓ_2，ℓ_2'；ℓ_3，ℓ_3'，令

$$g_\lambda=\ell_1\cdot\ell_2\cdot\ell_3-\lambda\ell_1'\cdot\ell_2'\cdot\ell_3'$$

是一個含有待定常數λ的三次式，易見不論λ取何值，A，B，C；A'，B'，C'；P，Q，R這九個點總是位於三次曲線$g_\lambda=0$之上的，在Γ上再取相異於A，B，C，A'，B'，C' 的一點E，代入g_λ令$g_\lambda(E)=0$ 即可求得一個特定的λ_0，使得$g_{\lambda_0}(E)=0$。這樣就求得一個三次曲線$g_{\lambda_0}=0$，它和錐線$f=0$至少有A，B，C；A'，B'，C'和E這七個相異的交點。這種現象只有在f和g_{λ_0}含有非零次的公因式的情形才可能發生，否則二次式和三次式聯立至多只有六個交點！但是f是不可約的（Γ是非蛻化的）所以f必須是g_{λ_0}的一個因式，亦即

$$g_{\lambda_0}=f\cdot\tilde{\ell}\text{，}\tilde{\ell}\text{是一個一次式}$$

最後，由

$$g_{\lambda_0}(P)=f(P)\cdot\tilde{\ell}(P)=0\text{，}$$
$$f(P)\neq 0\Rightarrow\tilde{\ell}(P)=0$$

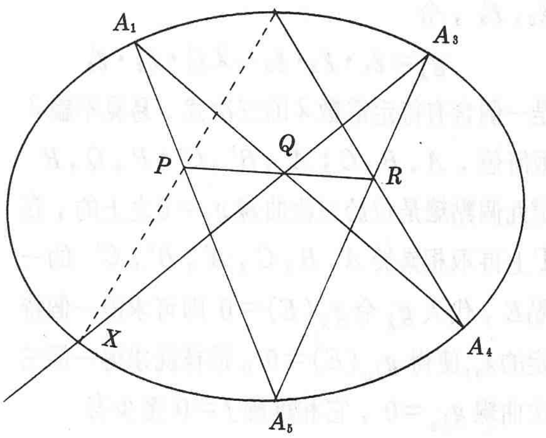
同理亦有$\tilde{\ell}(Q)=0$，$\tilde{\ell}(R)=0$，亦即P，Q，R共在直線$\tilde{\ell}=0$之上！

上述三個證明，第一個用到投影的想法把

它歸於圓的情形來論證，所用到的論證基礎是古典的孟氏定理和圓冪定理，是一個富於古典幾何風味的證法，第二個用到 Steiner 定理和交叉比的射影不變性，是多用射影幾何基礎理論的一種證明，第三個則是一種純代數的證法，巧用了待定系數法，錐線方程的二次性和聯立方程解點個數的基礎理論。由此可見是各具特色，各有千秋的三種證明。特此併列以供讀者比較玩味。再者，Pascal 定理是錐線的一個特徵性質，它有很多引人入勝的推論，下面只舉一個直接的基本推論。

【例6】 五點定一錐線的逐點作圖法

設Γ為由A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 所決定的錐線，ℓ是過A_3的任意一條直線，則ℓ和Γ的另一交點X可以用下述作圖法求得：



如上圖所示，

$A_1A_4 \cap \ell = Q$

$A_2A_4 \cap A_3A_5 = R$

$RQ \cap A_1A_5 = P$

$A_2P \cap \ell = X$ ，$X \in \Gamma$

〔讀者試用 Pascal 定理說明上述作圖的合理性。〕

【註】

上述作圖也充分說明 Pascal 定理也就是六點共一錐線的充要條件。

第五節 圓與角，保圓保角變換

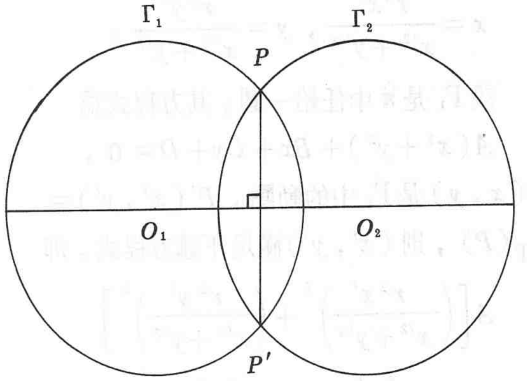
在歐氏平面幾何中，圓與角是兩個密切相關的基本子集和基本概念。它們都根源於平面的旋轉對稱；前者是一個點在繞定點旋轉的作用之下的軌跡，所以是平面中具有旋轉對稱的至精至簡事物；而角度也就是旋轉的度量。總之，角的度量離不開圓，而圓的基本性質也離不開角，例如圓周角定理，四點共圓條件等等；它們可以說是形影不離的一對，本節將從保圓保角變換的觀點，來對於圓與角的幾何作深入研討。再者，在本節的討論中，我們將把直線看做是圓的特例，亦即半徑是無窮大的圓，這樣做可以使得往後的討論和敍述變得更加整齊劃一，更具統一性，例如原先的“不共線”三點定一圓在新觀點之下就變成一律的“三點定一圓”。

㈠圓的反射對稱

由本章前幾節的討論的經驗，可以聯想到研討圓與角的本質，理當由保圓保角變換的探討着手。所有歐氏平面的保長變換當然都是保圓保角的，除了它們之外是否還有不保長的保圓保角變換呢？再者，在歐氏平面的保長變換之中，對於一條給定直線的反射對稱則是其中的至精至簡者；所有其他保長變換都可以由它們組合而得。在保圓保角變換的範疇中是否也有同樣的精簡事物呢？上述對於直線的反射對稱在保圓保角變換的範疇中是否可以適當地推廣成對於一個圓的反射對稱呢？為此，讓我們先來做一些溫故知新的工作，改用圓與角的觀點再來分析一下對於一條直線的反射對稱的幾何特徵。

【分析】

(i) 如下圖所示，P, P' 是對於直線 ℓ 成反射對稱的任給一對點偶，亦即 ℓ 是線段 PP' 的垂直平分線。由此可見，任何一個過 P, P' 點的圓，如下圖所示的 Γ_1, Γ_2 等，其圓心總是位於 ℓ 之上，因此都是和 ℓ 互相正交的。反之，若過相異兩點 P, P' 的任何一個圓總是和 ℓ 正交，則 P, P' 必定和 ℓ 成反射對稱。

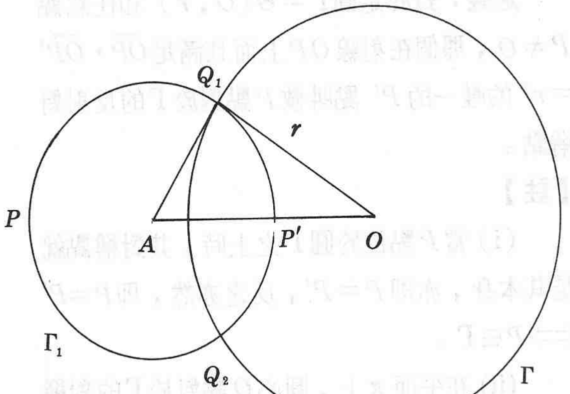


由此可問：對於一個定圓 Γ 和不在圓上的一點 P 是否會存在一個點 P' 使得任何過 P, P' 點的圓總是和圓 Γ 相正交的？

(ii) 假設果眞存在有這樣的一個點 P'，則直線 PP' 乃是過 P, P' 的圓的一個特例，所以應該是和 Γ 相垂直的，因此這個假設中的 P' 應該在 O、P 連線之上（我們且先把 P 點和 Γ 的圓心 O 點相重的情形除外）。再者，設 A 點是 $\overline{PP'}$ 的中點，Γ_1 是以 PP' 爲直徑的圓，亦即以 A 點爲圓心，$\frac{1}{2}|\overline{PP'}|$ 爲半徑者也，由所設它和 Γ 正交於兩點 Q_1、Q_2（如下圖所示）。由此可見，$\overline{AQ_i}$ 是圓 Γ 的切線，而 $\overline{OQ_i}$ 則是 Γ_1 的切線。再由圓幂定理即得

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$$

上述分析說明了：設 $P\neq 0$ 而且不在圓 Γ 之上，假設存在有它的"對稱點"P'，則它必須就是那個在射線 OP 之上而且 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$ 的



點。下述引理1則證明這樣的 P' 點的確是具有所要求的性質的。

引理1：設 Γ 是一個以 O 點爲圓心，r 爲半徑的圓，O、P、P' 三點共線而且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=r^2$，則任何過 P、P' 的圓都是和 Γ 互相正交的。

【證明】

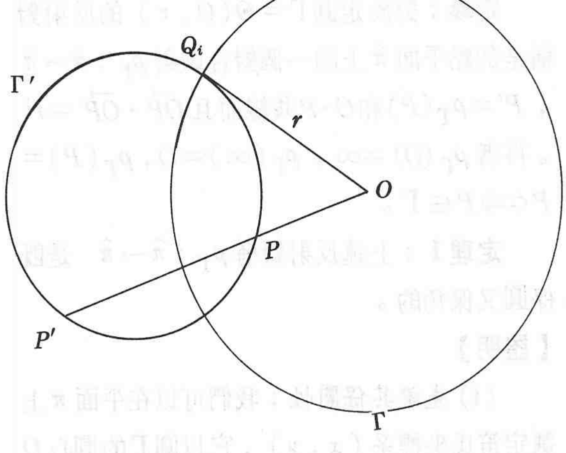
設 Γ' 是任給一個過 P、P' 的圓，交 Γ 於 Q_i，$i=1,2$。由所設，即有

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=r^2=\overline{OQ}_i^2$$

再者，由圓幂定理，

$\overline{OQ}_i^2=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=$ 由 0 到 Γ' 的切線長平方

亦即 $\overline{OQ_i}$ 和切線等長，所以 Q_i 就是直線 OQ_i 和 Γ' 的唯一交點，即 $\overline{OQ_i}$ 本身就是一條由 O



到Γ'的切線，所以Γ和Γ'正交於Q_i。

定義：對於定圓$\Gamma=\Theta(O,r)$和任意點$P\neq O$，那個在射線OP上而且滿足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=r^2$的唯一的$P'$點叫做$P$點對於$\Gamma$的反射對稱點。

【註】

(i) 當P點位於圓Γ之上時，其對稱點就是其本身，亦即$P=P'$，反之亦然，即$P=P'\Longleftrightarrow P\in\Gamma$。

(ii) 在平面π上，圓心O點對於Γ的對稱點不定義。再者，由上述定義易見當$|\overrightarrow{OP}|\to 0$時$|\overrightarrow{OP'}|\to\infty$；反之當$|\overrightarrow{OP}|\to\infty$時則有$|\overrightarrow{OP'}|\to 0$。由此可見，爲了便於研討圓的反射對稱，我們可以給平面添加一個無窮遠點∞，而且把它定義爲和圓心互相對稱之點。〔注意，在這裡只給平面添加一個無窮遠點，並不是像前面爲了便於研討平行和透視投影所做的——添加一條無窮遠直線，此事不但不足爲奇，而且是“用”所使然的！因爲對於原來的平面作適當的擴充的目的就是要便於某種事物的研討，所以究竟應該如何擴充法當然就是以如何合用爲準則，以前是爲了彌補平行線不相交的那種缺點，現在則是爲了彌補圓心不具有對稱點的這種缺點，所以理當要採取不同的補法才能恰當合用。〕我們將用符號$\hat{\pi}$表示將平面π添加一個無窮遠點∞所得的加點平面，亦即$\hat{\pi}=\pi\cup\{\infty\}$。再者，原來$\hat{\pi}$中的一條直線加上$\infty$之後所得的子集則定義爲$\hat{\pi}$中一個過$\infty$點的圓。

定義：對於定圓$\Gamma=\Theta(O,r)$的反射對稱是加點平面$\hat{\pi}$上的一個對合映射$\rho_\Gamma:\hat{\pi}\to\hat{\pi}$，$P'=\rho_\Gamma(P)$和$O$、$P$共線而且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=r^2$。再者$\rho_\Gamma(O)=\infty$，$\rho_\Gamma(\infty)=O$，$\rho_\Gamma(P)=P\Longleftrightarrow P\in\Gamma$。

定理1：上述反射對稱$\rho_\Gamma:\hat{\pi}\to\hat{\pi}$是既保圓又保角的。

【證明】

(i) 先證其保圓性：我們可以在平面π上選定笛氏坐標系(x,y)，它以圓Γ的圓心O點爲原點，則有兩個對稱點$P(x,y)$和$P'(x',y')$的坐標關係式如下，即

$$O,P,P'\text{ 共線}\Rightarrow x':x=y':y \Rightarrow x'=kx,\ y'=ky,$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=r^2\Rightarrow x\cdot x'+y\cdot y'=k(x^2+y^2)=r^2$$

亦即

$$x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2};$$

$$x=\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2},\quad y=\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}。$$

設Γ_1是$\hat{\pi}$中任給一圓，其方程式爲

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,$$

$P(x,y)$是Γ_1中的動點，$P'(x',y')=\rho_\Gamma(P)$，則(x',y')滿足下述方程式，即

$$A\left[\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2\right]$$

$$+B\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}+C\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}+D=0$$

亦即

$$r^4\cdot A+r^2Bx'+r^2Cy'+D(x'^2+y'^2)=0$$

由此可見，$\Gamma_1'=\rho_\Gamma(\Gamma_1)=\{\rho_\Gamma(P);P\in\Gamma_1\}$依然是一個圓。換句話說，$\rho_\Gamma$是保圓的。〔$A=0$時$\Gamma_1$是一條直線，$\Gamma_1'$過原點；$D=0$時$\Gamma_1$過原點，$\Gamma_1'$是一條直線。〕

(ii) 再證其保角性：已證$\rho_\Gamma:\hat{\pi}\to\hat{\pi}$是保圓的一、一對應。所以相切（或相交）的兩個圓$\Gamma_1$、$\Gamma_2$的映像$\Gamma_1'$、$\Gamma_2'$還是相切（或相交）的兩個圓。例如，設$\Gamma_1$、$\Gamma_2$相切於$P$點，$\Gamma_3$、$\Gamma_4$也相切於$P$點，則它們的映像$\Gamma_1'$、$\Gamma_2'$和$\Gamma_3'$、$\Gamma_4'$也是兩對相切於$P$點的圓，由此可見，假如我們能夠證明上述$\Gamma_1'$和$\Gamma_3'$在$P'$點的交角等於$\Gamma_1$和$\Gamma_3$在$P$點的交角，則可由保切性知$\Gamma_2'$、$\Gamma_4'$在$P'$點的交角也等於$\Gamma_2$、$\Gamma_4$在$P$點的交角。再者，假設$\Gamma_1$含有一對相異的對稱點$P$、$P'$，則$P$、$P'$分居於圓$\Gamma$的內、外部所以$\Gamma_1$和$\Gamma$相交，設其交點爲$Q_1$、$Q_2$。再由已證的保圓性得知其映像$\Gamma_1'$亦即由$P$、$P'$

、Q_1（或 Q_2）所定的圓，亦即這種圓的映像就是其本身！即有

$$P \neq P',\ P,\ P' \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow \Gamma_1' = \Gamma_1$$

基於上述兩點，即可直接推論 ρ_Γ 的保角性如下：

設 Γ_2、Γ_4 是相交於 P 點的圓，$P \notin \Gamma$，Γ_2'、Γ_4' 是它們的映像，我們要證明 Γ_2'、Γ_4' 在 P' 點的交角等於 Γ_2、Γ_4 在 P 點的交角。令 Γ_1、Γ_3 是過 P、P' 點而且分別和 Γ_2、Γ_4 相切於 P 點的圓〔讀者試證這種圓的唯一存在性，過 P、P' 點的圓的圓心恒在 $\overline{PP'}$ 的垂直平分線上。〕則有 $\Gamma_1' = \Gamma_1$，$\Gamma_3' = \Gamma_3$ 而且它們在 P、P' 點的交角顯然是相等的（因爲是對於 $\overline{PP'}$ 的垂直平分線成軸對稱的）。

最後，設兩圓 Γ_2、Γ_4 相交於 Γ 上的一點 P_1。運用上述保切性，我們不妨設 Γ_2、Γ_4 的另一交點 $P_2 \notin \Gamma$，則有它們的映像 Γ_2'、Γ_4' 相交於 P_1 和 P_2' 點 $P_2' \neq P_2$，再用前述所已證者，即有

Γ_2'，Γ_4' 在 P_1 點的交角
$=\Gamma_2'$，Γ_4' 在 P_2' 點的交角
$=\Gamma_2$，Γ_4 在 P_2 點的交角
$=\Gamma_2$，Γ_4 在 P_1 點的交角

這樣也就完全證明了 $\rho_\Gamma : \hat{\pi} \to \hat{\pi}$ 的保圓、保角性。

【例 1】 對稱點的作圖法

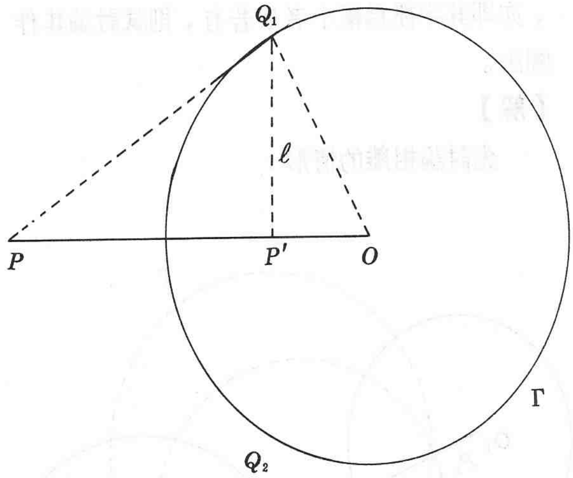
設 P、P' 是一對對於 Γ 成反射對稱之點。則 P、P' 和 Γ 之間有如右上圖所示的幾何結構，即有 $Q \in \Gamma$，

$$OQ_1 \perp PQ,\quad Q_1P' \perp OP\ 。$$

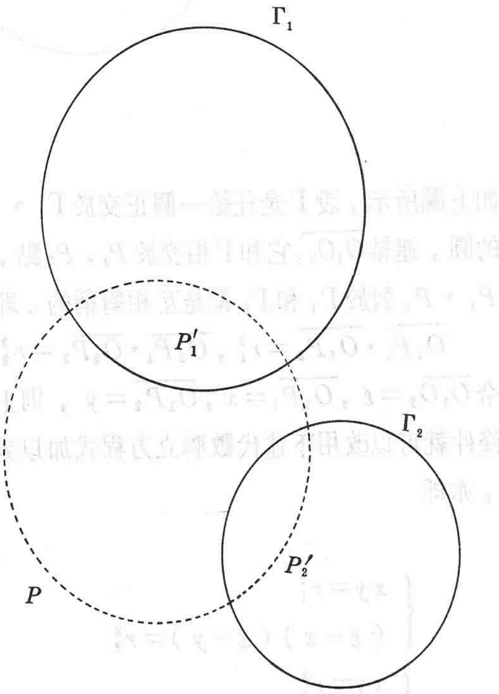
由此易見求作對稱點的下述作圖法：

(i) 若 P 點在圓外：連結 $\overline{OP}$，以 $\overline{OP}$ 爲直徑作圓 Γ_1，交 Γ 於 Q_1、Q_2 點，連結 $\overline{Q_1Q_2}$ 交 $\overline{OP}$ 於 P' 點，P' 點即爲所求的 P 點對於 Γ 的對稱點。

(ii) 若 P 點在圓內：連結 $\overline{OP}$ 過 P 點作 $\overline{OP}$ 的垂線 ℓ，交 Γ 於 Q_1、Q_2 點，過 Q_1 點作 $\overline{OQ_1}$ 的垂線，交 OP 於 P' 點，它即爲所求作的對稱點。



【例 2】 設 Γ_1、Γ_2 是兩個給定圓，$P \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$，試作一圓 Γ 它過 P 點而且和 Γ_1、Γ_2 都正交。



【解】

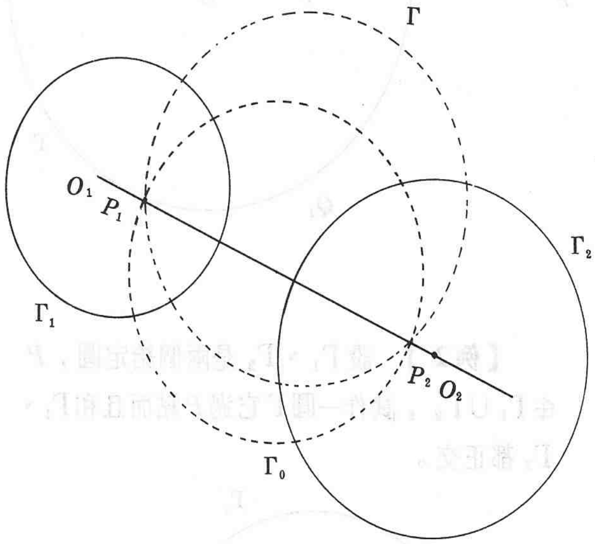
令 P_1' 和 P_2' 分別是 P 點對於 Γ_1、Γ_2 的反射對稱點。則由 P、P_1'、P_2' 所定的圓 Γ 即爲所求。〔讀者試證上述 Γ 是過 P 點且和 Γ_1、Γ_2 正交的唯一的圓。〕

【例 3】 設 Γ_1、Γ_2 是兩個相離或相含

的圓，亦即$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$，試問在所有和$\Gamma_1$、$\Gamma_2$都正交的圓系之中是否有一個唯一的最小者，亦即其半徑爲極小者？若有，則試討論其作圖法。

【解】

先討論相離的情形：



如上圖所示，設Γ是任給一個正交於Γ_1、Γ_2的圓，連結$\overline{O_1O_2}$，它和Γ相交於P_1，P_2點，則P_1、P_2對於Γ_1和Γ_2都是互相對稱的。即有

$$\overline{O_1P_1}\cdot\overline{O_1P_2}=r_1^2,\ \overline{O_2P_1}\cdot\overline{O_2P_2}=r_2^2$$

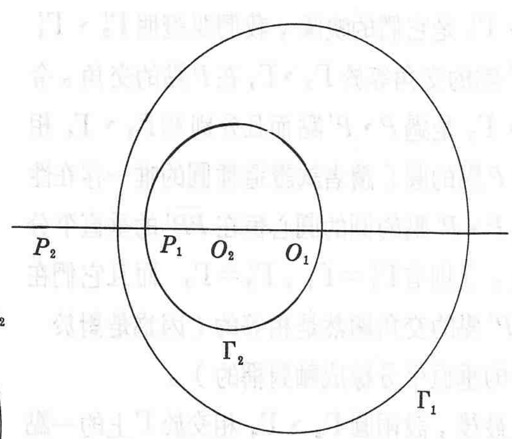
令$\overline{O_1O_2}=\ell$，$\overline{O_1P_1}=x$，$\overline{O_1P_2}=y$，則上述條件就可以改用下述代數聯立方程式加以表達，亦即

$$\begin{cases} xy=r_1^2 \\ (\ell-x)(\ell-y)=r_2^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} xy=r_1^2 \\ x+y=\dfrac{\ell^2+r_1^2-r_2^2}{\ell} \end{cases}$$

由此可見，上述交點P_1、P_2是唯一確定的（和Γ的選取無關）而且可以用軌尺作圖求得者。再者，和Γ_1、Γ_2正交的圓系也就是過P_1、P_2點的圓系，其中半徑最小者顯然就是那個以$\overline{P_1P_2}$爲直徑者。

相含的情形基本上和上述相離的情形相似，所不同者只是P_1、P_2和O_1、O_2之間的相對位置改爲下圖所示的情況，讀者試自討論之。



【例4】（Miquel 定理）設有加點平面$\hat{\pi}$上的八個點$\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$，若有下述各組四點共圓，即

(A,B,F,H)；

(A,C,G,H)；

(B,C,E,H)；

(A,D,F,G)和

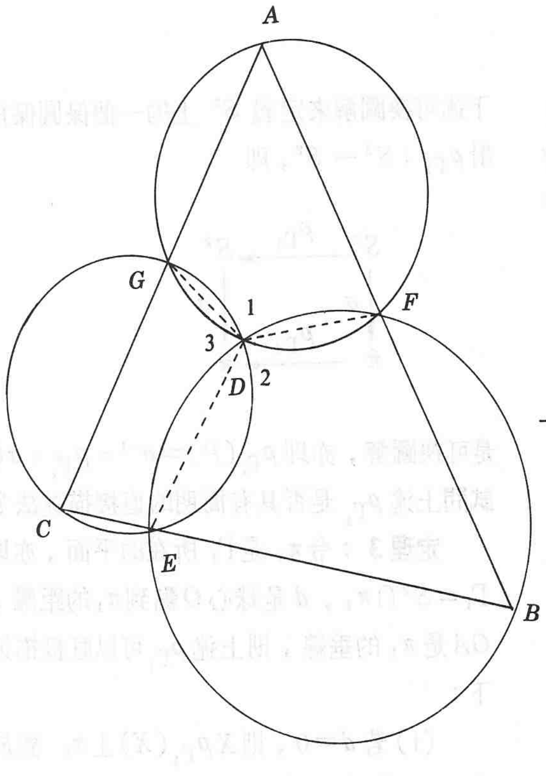
(B,D,E,F)

則(C,D,E,G)也必定共圓。

【證明】

利用$\rho_\Gamma:\hat{\pi}\to\hat{\pi}$的保圓保角性，我們可以把上述定理的證明歸於其中一點，例如H，是無窮遠點的簡化形式來加以論證。〔例如取用一個以H點爲圓心的圓爲Γ，則上述幾何結構就可以用ρ_Γ映像爲$H'=\infty$的簡化形式。〕

在$H=\infty$的簡化形式，上述條件中含有H的三組共圓條件就簡化成爲(A,B,F)，(A,C,G)和(B,C,E)分別三點共線，因此所剩的七點之間的幾何結構即可圖示如下：



連結$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$，令D點的三個角分別是$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$。由（A，D，F，G）四點共圓即有

$$\angle 1+\angle A=\pi \text{（平角）}$$

由（B，D，E，F）四點共圓即有

$$\angle 2+\angle B=\pi$$

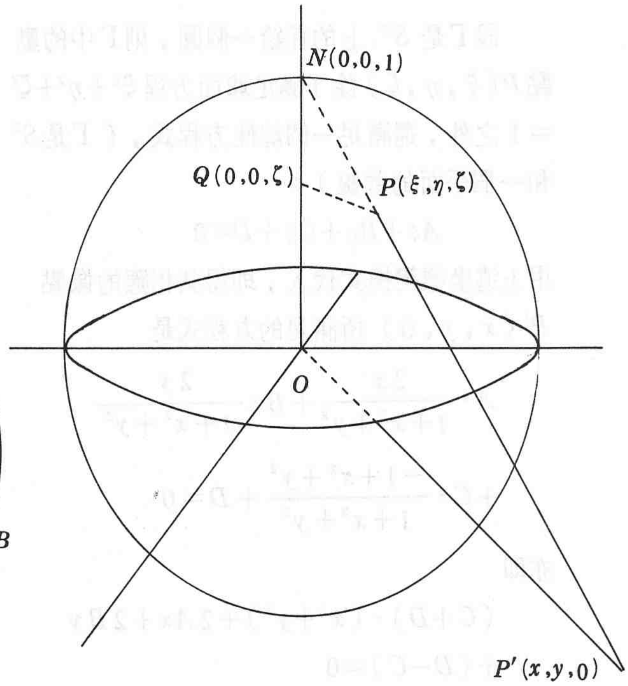
再由$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\pi$和$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，即得

$$\angle 3+\angle C=\pi \Rightarrow (C,D,E,G)\text{四點共圓。}$$

㈡極投影（Stereographic Projection）：

在前段討論對於一個圓Γ的反射對稱ρ_Γ時，我們認識到平面應該適當地加上一個“無窮遠點”∞；它是所有無限遠離圓心O點的發散點列$\{P_n\}$的共同極限。從拓撲學（Topology）的觀點來說，像這樣地加添單個無窮遠點∞，就把平面封閉成一個緊緻（Compact）的二維空間模式。現在，讓我們來介紹一個在東、西文明中都早已熟用的極投影，它恰好把上述拓撲觀點完美地體現出來。

如下圖所示，S^2是以原點O為球心的單位半徑球面，π為x、y坐標面，亦即$z=0$的平面



。$N=(0,0,1)$，$P=(\xi,\eta,\xi\}$為S^2上的動點，在$P\neq N$時，令$P'=(x,y,0)$是直線NP和π的交點，$Q=(0,0,\zeta)$。令$r=\overline{OP'}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\rho=\overline{QP}=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，則由$\Delta NPQ\backsim\Delta NP'O$，即可得出下列關係：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\xi}=\dfrac{y}{\eta}=\dfrac{r}{\rho}=\dfrac{1}{1-\zeta}, \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1, \\ \rho^2=\xi^2+\eta^2=1-\zeta^2\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}x=\dfrac{\xi}{1-\zeta},\ y=\dfrac{\eta}{1-\zeta}, \\ \xi=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},\ \eta=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}, \\ \zeta=\dfrac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\end{cases}$$

定義：極投影就是把上述$P(\zeta,\eta,\zeta)$點映射到$P'(x,y,0)$點，而且把N點映射到∞的映射$\sigma: S^2\to\hat{\pi}=\pi\cup\{\infty\}$。

定理2：極投影$\sigma: S^2\to\pi$是既保圓又保角的。

【證明】

(i) 先證其保圓性：

設Γ是 S^2 上的任給一個圓，則Γ中的動點$P(\xi,\eta,\zeta)$除了滿足球面方程$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$之外，還滿足一個線性方程式，（Γ是S^2和一個平面的截線）：

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0$$

用上述坐標變換式代入，即得其相應的像點$P'(x,y,0)$所滿足的方程式是

$$A\cdot\frac{2x}{1+x^2+y^2}+B\cdot\frac{2y}{1+x^2+y^2}+C\cdot\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}+D=0$$

亦即

$$(C+D)\cdot(x^2+y^2)+2Ax+2By+(D-C)=0$$

當$C+D\neq 0$時，上述方程式的解點點集是一個圓；當$C+D=0$時，亦即$N\in\Gamma$時，則其解點點集是一條直線，亦即圓的特例，$\infty\in\Gamma'$。這也就證明了σ的保圓性。

(ii) 再證其保角性：

設γ_1、γ_2是S^2上兩條相交於P點（$P\neq N$）的平滑曲線；T_1、T_2分別是γ_1、γ_2在P點的切向量。令π_1、π_2分別是過N、P點而且分別包含T_1、T_2的平面，$\Gamma_1=\pi_1\cap S^2$，$\Gamma_2=\pi_2\cap S^2$，由上述構造可以看到Γ_1、Γ_2在P點的夾角等於γ_1、γ_2在P點的夾角，也等於Γ_1、Γ_2在N點的夾角。因爲極投影顯然是保持相交與相切關係的，所以它們的映像γ_1'、γ_2'；Γ_1'、Γ_2'也當然有關係

γ_1'、γ_2'在P'點的夾角

$=\Gamma_1'$、Γ_2'在P'點的夾角

令π_0是S^2在N點的切平面，則顯然有$\pi_0/\!/\pi$，而且$\pi_0\cap\pi_1$和$\pi_0\cap\pi_2$分別就是Γ_1、Γ_2在N點的切線。再者，$\Gamma_1'=\pi\cap\pi_1$，$\Gamma_2'=\pi\cap\pi_2$是分別和$\pi_0\cap\pi_1$、$\pi_0\cap\pi_2$相平行的，所以它們的夾角顯然相等，這也就證明了σ的保角性。

問題：設Γ_1是S^2中的一個給定圓，$\Gamma_1'=\sigma(\Gamma_1)$是它在$\hat{\pi}$中的映像，我們可以用下述可換圖解來定義$S^2$上的一個保圓保角映射$\rho_{\Gamma_1}:S^2\to S^2$，即

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\rho_{\Gamma_1}"] \arrow[d, "\sigma"] & S^2 \arrow[d, "\sigma"] \\ \hat{\pi} \arrow[r, "\rho_{\Gamma_1'}"] & \hat{\pi} \end{tikzcd}$$

是可換圖解，亦即$\rho_{\Gamma_1}(P)=\sigma^{-1}\circ\rho_{\Gamma_1'}\circ\sigma(P)$

試問上述ρ_{Γ_1}是否具有簡明的直接描述法？

定理3：令π_1是Γ_1所在的平面，亦即$\Gamma_1=S^2\cap\pi_1$，d是球心O點到π_1的距離，OA是π_1的垂線，則上述ρ_{Γ_1}可以直接描述如下：

(i) 若$d=0$，則$X\rho_{\Gamma_1}(X)\perp\pi_1$ 對於所有$X\in S^2\setminus\Gamma$皆成立。

(ii) 若$d\neq 0$，則$X\rho_{\Gamma_1}(X)$，$X\in S^2\setminus\Gamma$，都共交OA於一點C

$$|\overrightarrow{OC}|=\frac{1}{d}。$$

【註】

當$X\in\Gamma$時，顯然恒有$\rho_{\Gamma}(X)=X$，所以上述定理3簡潔地描述了ρ_{Γ_1}的幾何特徵。

【證明】

因爲σ和$\rho_{\Gamma_1'}$都是既保圓又保角的，所以上述用可換圖解描述的$\rho_{\Gamma_1}:S^2\to S^2$當然也是既保圓又保角的。再者設$X$是$S^2\setminus\Gamma$中任給一點，$X'=\sigma(X)$，則有

$$\rho_{\Gamma_1}(X)'=\sigma(\sigma^{-1}\circ\rho_{\Gamma_1'}\circ\sigma)(X)=\rho_{\Gamma_1'}(X')。$$

因爲X'、$\rho_{\Gamma_1'}(X')$和Γ_1'之間的特徵關係就是任何過X'、$\rho_{\Gamma_1'}(X')$的圓皆和Γ_1'正交，所以X、$\rho_{\Gamma_1}(X)$和Γ_1之間的特徵關係，也同樣地就是任何過X、$\rho_{\Gamma_1}(X)$的圓都和Γ_1正交，所以我們只要證明定理中所描述的對應點的確是具有上述特徵性質者。

在$d=0$的情形，Γ_1是S^2的一個大圓，對於任給一對$\overline{XY}\perp\pi_1$的球上兩點，和一個過X、Y的圓Γ_2，Γ_2所在的平面π_2是和π_1相

垂直的，所以Γ_2和Γ_1也是正交的。亦即上述Y就是$\rho_{\Gamma_1}(X)$，亦即ρ_{Γ_1}就是S^2對於π_1的反射對稱。在$d\neq0$的情形，$\overline{OC}$和π_1直交於C'點，而且有$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC'}=1$（半徑平方），由此可見，由$C$點到$\Gamma_1$上任給一點$X_1$的連線其實都是和球面相切的，而且和$\Gamma_1$互相垂直，再者，$X$是$S^2\setminus\Gamma_1$中任給一點，$Y$是直線$CX$和$S^2$的另一交點，$\pi_2$是過$X$、$Y$的任給一平面，$\Gamma_2=\pi_2\cap S^2$。設$X_1\in\Gamma_1\cap\Gamma_2$，則$\Gamma_2$在$X_1$點的切線就是$X_1C$，它是和$\Gamma_1$相垂直的。由此可見上述$Y$就是$\rho_{\Gamma_1}(X)$，亦即$\rho_{\Gamma_1}$就是以$C$點爲中心的一種"透視投影"。

【習題】

(1)圓外一點P到$\Theta(O,r)$的兩條切線是對於連線OP成反射對稱的，試問球外一點P到一個以O爲圓心的球面的切線和連線OP之間是否也具有某種對稱性？試說明之。

(2)試證單位球面$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1=0$之外一點$P(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$到單位球面的所有切線，其切點是一個滿足下述方程式的圓，即

$$\xi_0\xi+\eta_0\eta+\zeta_0\zeta-1=0\text{。}$$

(三)共軸圓系和共軛圓系

單位球面S^2上的圓都是它和一個平面的截線，假如我們用一個有組織的平面系去截割球面S^2，則可得具有相應組織的S^2上的圓系，在各種平面系之中，最爲簡樸自然者首推共線平面系和平行平面系（後者亦可看作共交於一條無窮遠直線的共線平面系，所以將把它看作共線平面系的特例而不再另加別論）。由此可見，一個共線平面系和S^2所截而得的圓系乃是S^2上各種圓系之中最爲簡樸者，稱之爲**共軸圓系**（Co-axial family of circles）。一個共線平面系由其中的兩個平面所唯一確定〔這樣兩個面的交線就是該平面系所共交的直線〕。再者，設兩個平面的方程式分別是

$$\pi_i: A_i\xi+B_i\eta+C_i\zeta+D_i=0 \quad i=1,2$$

則它們所生成的共線平面系中其他成員的方程式均可表成下述形式，即

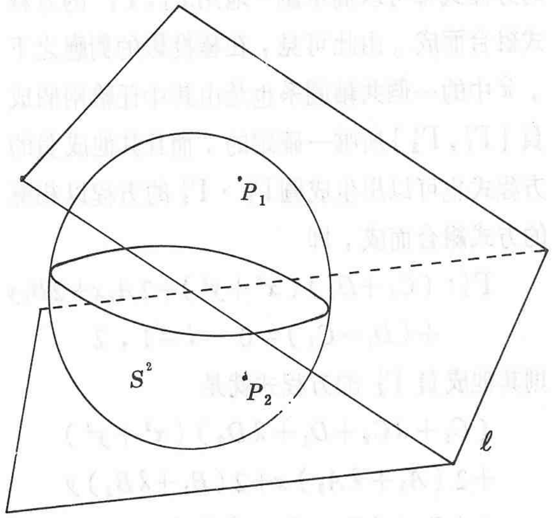
$$\pi_\lambda: A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta+D_1 + \lambda(A_2\xi+B_2\eta+C_2\zeta+D_2)=0$$

$\lambda\in\boldsymbol{R}$。

【例1】 設共線平面系所共交的軸線ℓ和S^2交於Q_1、Q_2兩點。則它和S^2交截所得的共軸圓系也就是S^2上所有過Q_1、Q_2點的圓所組成者。

【例2】 設共線平面系所交的軸線ℓ和S^2相切於Q點，則它和S^2交截所得的共軸圓系也就是S^2上所有以ℓ爲其在Q點的切線的圓所組成者。

【例3】 設共線平面系所共交的軸線ℓ和S^2不相交，亦即$\ell\cap S^2=\phi$，則它和S^2交截所得的共軸圓系之中含有兩個點圓，而且該圓系由這兩個點圓所唯一確定，如下圖所示，



以直線ℓ爲軸的共線平面系中共有兩個平面和S^2相切，如圖示中的P_1、P_2，這兩個切點乃是所截的共軸圓中的特例。反之，由上述兩個點圓P_1、P_2，即可分別作S^2在P_1、P_2的切面，它們的交線也就是共線平面系的軸。

由此可見，共軸圓系可以分成上述三類，即第一類是共交於相異兩點者，其中不含有點圓；第二類是共切於一點者，其中僅含有一個

點圓，即其共切之點；第三類是各不相交者，其中含有兩個點圓。

現在讓我們再來看一看上述 S^2 上的共軸圓系在極投影之下相對應的 $\hat{\pi}$ 中的共軸圓系是何許事物？又有些什麼幾何特性？

【分析】

(i) 在討論圓的對應時，採取解析觀點用方程來描述圓是有效的簡明手法。一個 S^2 上的圓的方程式也就是它的截平面的方程，乃是一個下述形式的三元一次式：

$$\Gamma: A\xi+B\eta+C\zeta+D=0$$

用極投影的坐標變換式即可求得相應的 $\hat{\pi}$ 中的圓 $\Gamma'=\sigma(\Gamma)$ 的方程式就是下述形式的二元二次式：

$$\Gamma': (C+D)(x^2+y^2)+2Ax+2By+(D-C)=0$$

(ii) S^2 上的一個共軸圓系由其中任給兩個成員 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ 所唯一確定，而且其他成員的方程式都可以簡單劃一地用 Γ_1, Γ_2 的方程式組合而成。由此可見，在極投影的對應之下，$\hat{\pi}$ 中的一個共軸圓系也是由其中任給兩個成員 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 所唯一確定的，而且其他成員的方程式也可以用生成圓 Γ_1'、Γ_2' 的方程以相應的方式組合而成，即

$$\Gamma_i': (C_i+D_i)(x^2+y^2)+2A_ix+2B_iy+(D_i-C_i)=0 \quad i=1, 2$$

則其他成員 Γ_λ' 的方程式就是

$$\begin{aligned}&(C_1+\lambda C_2+D_1+\lambda D_2)(x^2+y^2)\\&+2(A_1+\lambda A_2)x+2(B_1+\lambda B_2)y\\&+(D_1+\lambda D_2-C_1-\lambda C_2)\\&=\{(C_1+D_1)(x^2+y^2)+2A_1x+2B_1y\\&+(D_1-C_1)\}+\lambda\cdot\{(C_2+D_2)(x^2+y^2)\\&+2A_2x+2B_2y+(D_2-C_2)\}=0\end{aligned}$$

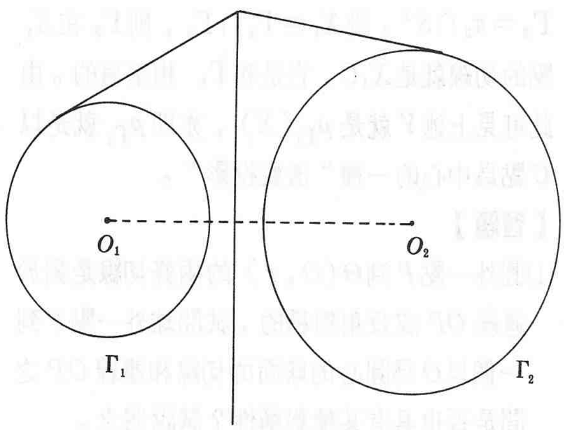
換句話說，在 $\hat{\pi}$ 中由兩個任給的圓 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 所生成的共軸圓系也就是由所有方程能表成

$$\Gamma_\lambda'=\Gamma_1'+\lambda\Gamma_2'=0; \lambda\in R\cup\{\infty\}$$

的圓所組成的圓系。〔其中當 $\lambda=0$ 時 $\Gamma_\lambda'=\Gamma_1'$，當 $\lambda=\infty$ 時則定義 $\Gamma_\lambda'=\Gamma_2'$。〕

【例4】 當 $\hat{\pi}$ 中的一個共軸圓系中含有兩條直線時，則它其實是一個共點直線系或平行直線系。

【例5】 除了上述直線系的特殊情形，所有其他共軸圓系中都僅含有一條直線，而且這條直線也就是其他任給兩個成員的"等冪軸"，如下圖所示。



〔Γ_1、Γ_2 的等冪軸的定義是到兩圓的"圓冪"相等的點的軌跡；P 點到圓 Γ 的圓冪則定義爲圓冪定理中的常數積 $\overrightarrow{PQ_1}$, $\overrightarrow{PQ_2}=\overline{OP}^2-r^2$。〕

【習題】

(1)設 Γ 的方程式是

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

P 點的坐標是 (x_0, y_0)，試證 P 點到圓 Γ 的"圓冪"等於

$$x_0^2+y_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F。$$

(2)設 Γ_1、Γ_2 的方程式分別是

$$x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0, \quad i=1, 2$$

則 Γ_1、Γ_2 的等冪軸的方程式就是

$$2(D_1-D_2)x+2(E_1-F_2)y+(F_1-F_2)=0$$

(3)試對於三類共軸圓系分別討論例 5 中所述的共同等冪軸的幾何特點，例如在第三類的情形它和那兩個點圓之間的關係如何？

【例6】 設 $\Gamma_i: x^2+y^2+2D_ix+2E_iy$

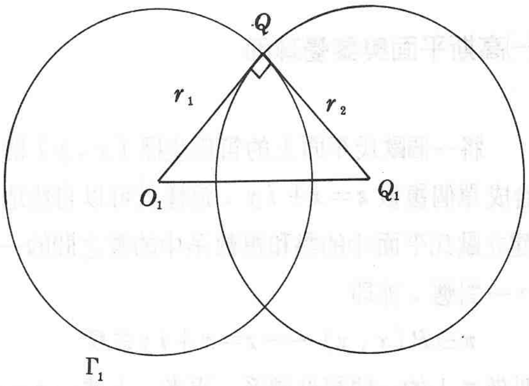
$+F_i=0$，$i=1$，2，則Γ_1、Γ_2互相正交的充要條件是其係數滿足下列條件：

$$2(D_1D_2+E_1E_2)-(F_1+F_2)=0$$

【證明】

用配方法易見Γ_i，$i=1$，2的圓心O_i的坐標爲$(-D_i, -E_i)$；而其半徑平方則爲

$$r_i^2=D_i^2+E_i^2-F_i。$$



再者，由上述圖解可見兩圓正交的充要條件就是

$$\overline{O_1O_2}^2=r_1^2+r_2^2$$

即 $(D_2-D_1)^2+(E_2-E_1)^2-(D_1^2+E_1^2-F_1)-(D_2^2+E_2^2-F_2)=0$

亦即

$$-2(D_1D_2+E_1E_2)+(F_1+F_2)=0$$

【例7】 設Γ和兩個圓Γ_1、Γ_2都互相正交，則Γ和Γ_1、Γ_2所生成的共軸圓系中每一個圓也是正交的。

【證明】

設Γ、Γ_1、Γ_2的方程式分別爲

Γ：$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$

Γ_i：$x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F=0$，$i=1,2$

則由所設的正交性即有

$$\begin{cases} 2(DD_1+EE_1)-(F+F_1)=0 \cdots\cdots ① \\ 2(DD_2+EE_2)-(F+F_2)=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

再者，由Γ_1、Γ_2所生成的共軸圓系中的任給其他成員的方程式可以寫成$\Gamma_1+\lambda\Gamma_2=0$，改寫成準式即爲

$$x^2+y^2+2\left(\frac{D_1+\lambda D_2}{1+\lambda}\right)x+2\left(\frac{E_1+\lambda E_2}{1+\lambda}\right)y+\frac{F_1+\lambda F_2}{1+\lambda}=0$$

由①、②易得

$$2\left(D\cdot\frac{D_1+\lambda D_2}{1+\lambda}+E\cdot\frac{E_1+\lambda E_2}{1+\lambda}\right)-\left(F+\frac{F_1+\lambda F_2}{1+\lambda}\right)=0$$

所以它也是和Γ正交的。

【例8】 所有和兩個定圓Γ_1、Γ_2都正交的圓構成一個共軸圓系。

【證明】

設$P\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$，令$P'$、$P''$分別是它對於$\Gamma_1$、$\Gamma_2$的反射對稱點，則過$P$、$P'$、$P''$的圓就是和$\Gamma_1$、$\Gamma_2$都是正交的。由此可見，和$\Gamma_1$、$\Gamma_2$都正交的圓顯然有無窮多個。設$\Gamma$、$\Gamma'$是其中兩個相異的成員，由例7得知，由$\Gamma$、$\Gamma'$所生成的共軸圓系中的每一成員都是和$\Gamma_1$、$\Gamma_2$正交的，最後，我們還要說明不可能有上述共軸圓系之外的圓和Γ_1、Γ_2都正交。假若可能，設Γ''是一個系外者，則所有其方程能表成下述形式者也都和Γ_1、Γ_2正交，即

$$\Gamma+\lambda\Gamma'+\mu\Gamma''=0 \quad \lambda,\mu\in R$$

這是和三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 2(DD_1+EE_1)-(F+F_1)=0 \\ 2(DD_2+EE_2)-(F+F_2)=0 \end{cases}$$

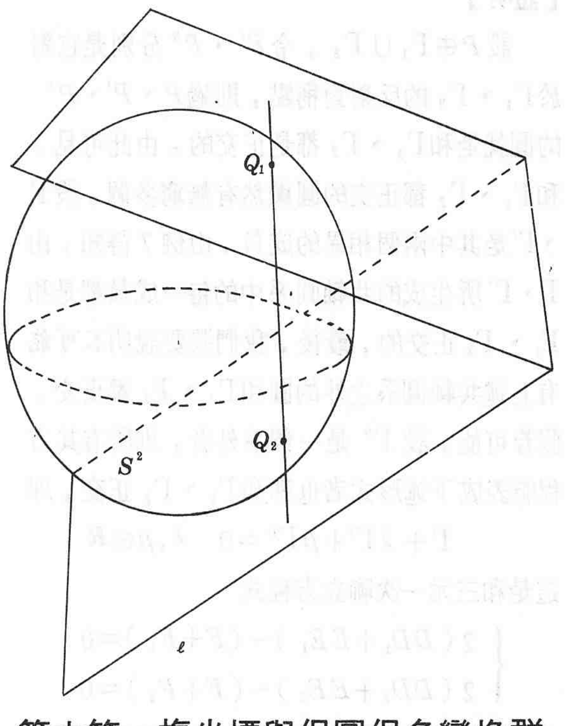
中解組(D,E,F)中只含有一個任意參數相矛盾的。由此可見，對於一個共軸圓系，唯一存在另一個共軸圓。每一個前者的成員和每一個後者的成員都是互相正交的。這樣一對互相正交的共軸圓系稱爲是互相共軛的（conjugate）。

【例9】 一個第一類的共軸圓系的共軛圓系是一個第三類者，它所含的兩個點圓就是前者所共交的那兩個點；反之，一個第三類的共軸圓系的共軛圓系是一個第一類者，其成員

共交於前者所含的那兩個點圓之點。再者，一個第二類的共軸圓系的共軛圓系還是一個第二類者，它們含有相同的點圓，而且在該點正交。

【例9′】 改由 S^2 上的共軸圓系來看，一個共軸圓系是由它相應的共線平面系的共交軸所確定的，而互相共軛的兩個共軸圓系所對應的兩條共交軸線之間的幾何關係如下：

在兩系都是第二類的情形，這兩條軸線是 S^2 上某一點的兩條正交切線；在第一、三類互相共軛的情形，則第一類的共交軸是 S^2 上兩點的連線，而其共軛的第三類的共交軸則是上述兩點的 S^2 的切平面的交截線，如下圖所示。



第六節　複坐標與保圓保角變換群

驟看起來，第五節所研討的圓與角和前四節討論的線性子集的連結和交截；兩者之間並沒有什麼特出的共性。為什麼要把它們相提並論，共列為同一章來討論呢？其實並不是兩者之間沒有特出的共性，而是這種內蘊的共性得要通過平面和球面的複坐標和進一層的解析研討才能明白展現，這也就是本節的主要課題。從複坐標系的解析觀點來看，加點平面 π 或球 S^2 也就是複數城上的影射直線；其上的保角保圓變換則是複射影變換。再者，為了便於更加有系統地展現“變換”在幾何學中的作用，本節將開始把同一類型的變換組合成群，引進變換群的自然結構，並且以由前述圓的反映組合而成的保圓、保角變換群（亦即Möbius 群）為例，初步地對於變換群的不變量作一簡單介紹。

(一)高斯平面與黎曼球面

將一個歐氏平面上的笛氏坐標 (x, y) 結合成單個複數 $z=x+iy$，這樣就可以自然地建立歐氏平面中的點和複數系中的數之間的一、一對應，亦即

$$\pi \ni P(x, y) \longleftrightarrow z=x+iy \in C$$

叫做 π 上的一個複坐標系。再者，上述一、一對應當然還可以擴充成加點平面或球面 S^2 和 $C\cup\{\infty\}$ 之間的一、一對應，亦即

$$S^2 \xleftrightarrow{\sigma} \hat{\pi} \longleftrightarrow C\cup\{\infty\}$$

其中∞（無窮遠點）↔∞（無窮大元素），叫做球面的複坐標系。

【分析】

(i) 在上述複坐標系中，複（數）坐標的加法相應於平面向量的加法，複坐標的絕對值相應於向量的長度，亦即

$$P_j \leftrightarrow z_j \ , \ j=1, 2,$$

則有 $\overrightarrow{P_1P_2} \leftrightarrow (z_2-z_1)$

$$\mathbf{a} \leftrightarrow z \ , \ \mathbf{b} \leftrightarrow z'$$

則有 $\mathbf{a}+\mathbf{b} \leftrightarrow z+z'$，$|\mathbf{a}|=|z|$。

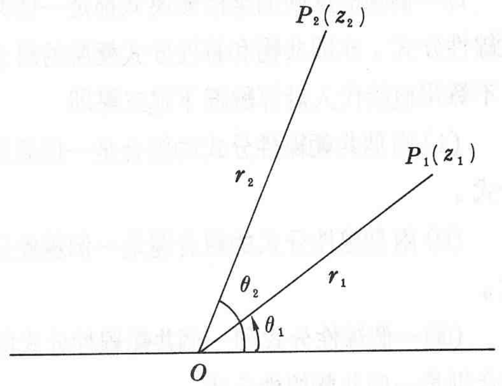
(ii) 設 P_j，$j=1, 2$ 的極坐標是 (r_j, θ_j)，複坐標是 z_j，則有

$$z_j = x_j + i y_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$$

由此即得

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

換句話說，複坐標相乘的幾何意義是絕對值相乘，幅角相加！〔亦即 $z_1 \cdot z_2$ 的極坐標是 $(r_1 \cdot r_2, \theta_1+\theta_2)$〕



(iii) 複數共軛的幾何意義就是對於實數軸的反射對稱，亦即絕對值不變，而幅角改號。

〔上述分析業已顯示複坐標可以把距離和角度比笛氏坐標更爲簡潔地用複數運算加以表達，因此用它來研討圓與角也就自然更加簡明有力了。〕

【例1】 以 $P_0(z_0)$ 點爲圓心，r 爲半徑的圓的複坐標方程式就是

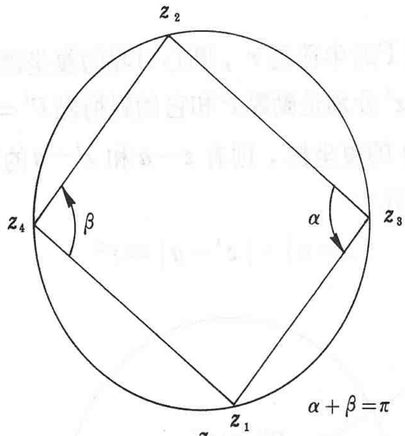
$$|z-z_0|^2 = (z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) = r^2$$

亦即

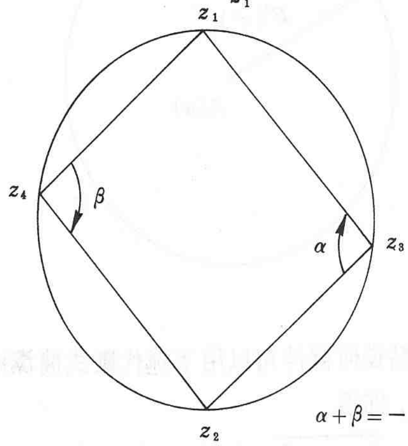
$$z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + (z_0\bar{z}_0 - r^2) = 0。$$

【例2】 四點共圓的條件：設 $P_j(z_j)$；$j=1,2,3,4$ 是平面上共圓的四點。如下圖所示，即有其複坐標的交叉比的幅角乃是 $\alpha+\beta=\pi$，0 或 $-\pi$。

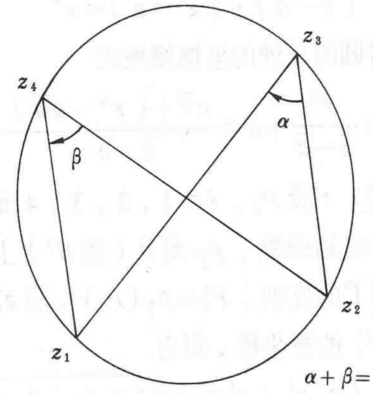
因爲 $\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 和 $\dfrac{z_4-z_2}{z_4-z_1} = \dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$ 的幅角分別就是上述三圖中的 α 和 β，由此可見上述交叉比是一個實數。亦即 $(z_1z_2;z_3z_4) \in \boldsymbol{R}$。反之，若 $(z_1z_2;z_3z_4) \in \boldsymbol{R}$，則上述三圖所示的 $\alpha+\beta=\pm\pi$ 或 0，所以四點共圓。這也就證明了高斯平面上四點共圓的充要條件就是它們複坐標的交叉比是一個實數。



$\alpha+\beta=\pi$



$\alpha+\beta=-\pi$



$\alpha+\beta=0$

【例2′】 過三定點的圓的參數式

設已給三定點 $P_j(z_j)$；$j=1,2,3$，$P(z)$ 是其所定之圓 Γ 上的動點，由例2即有

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \cdot \frac{z-z_2}{z-z_1} = t \leftarrow \boldsymbol{R}$$

解之即得

$$z = \frac{z_2 - az_1t}{1-at}, \quad a = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

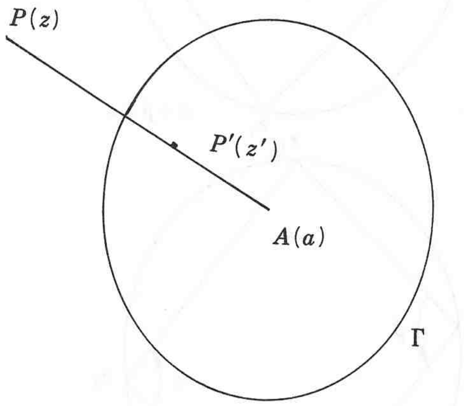
$$t \in \boldsymbol{R} \cap \{\infty\}$$

這也就是圓的複坐標三點參數式。

【例3】 圓的反映的複坐標變換式

設Γ的半徑爲r，圓心A點的複坐標爲a；z、z'分別是動點P和它的對稱點$P'=\rho_\Gamma(P)$的複坐標，則有$z-a$和$z'-a$的幅角相等而且

$$|z-a|\cdot|z'-a|=r^2$$



上述兩點幾何條件可以用下述代數式簡潔地充分表達，即爲

$$\overline{(z-a)}\cdot(z'-a)=r^2$$

解之即得圓的反映的坐標變換式

$$z'=\frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a=\frac{a\bar{z}+(r^2-a\bar{a})}{\bar{z}-\bar{a}}。$$

引理 1：設P_i，$i=1,2,3,4$是$\hat{\pi}$（或S^2）中任給四點，ρ_Γ是$\hat{\pi}$（或S^2）上對於某一定圓Γ的反映，$P_i'=\rho_\Gamma(P_i)$，設z_i'分別是P_i、P_i'的複坐標，則有

$$(z_1'z_2';z_3'z_4')=\overline{(z_1z_2;z_3z_4)}$$

〔亦即複坐標的交叉比在一個圓的反映的作用之下，是變換成它的複共軛。〕

【證明】

由例 3 得知z'是$\bar{z}$的線性分式，而交叉比是在任何線性分式的代換之下保持不變的！〔參看本章第二節之㈡〕。由此易見

$$(z_1'z_2';z_3'z_4')=(\bar{z}_1\bar{z}_2;\bar{z}_3\bar{z}_4)$$
$$=\overline{(z_1z_2;z_3z_4)}$$

〔至此，複坐標系的妙處以及目下所討論的事物和前四節所討論的射影幾何之間的共性也就可見其端倪了。〕

引理 2：設φ：$\hat{\pi}\to\hat{\pi}$（或$S^2\to S^2$）是有限個圓的反映的組合，z、w分別是動點P和其像點$\varphi(P)$的複坐標，則有

(i) 當φ是偶數個反映的組合時w是z的一個線性分式。

(ii) 當φ是奇數個反映的組合時w是$\bar{z}$的一個線性分式。

【證明】

每一個圓的反映的坐標變換式都是一個共軛線性分式，亦即共軛和線性分式變換的組合，不難用直接代入計算驗證下述三點即

(i) 兩個共軛線性分式的組合是一個線性分式。

(ii) 兩個線性分式的組合還是一個線性分式。

(iii) 一個線性分式和一個共軛線性分式的組合則是一個共軛線性分式。

〔上述直接驗算留作習題。〕

【例 4】 平移的變換式是$w=z+a$，旋轉的變換式則是$w=(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$。在歐氏幾何的研討中，業已熟知前者可以由適當的二條平行線的反射對稱組合而成；而後者則可以由二條相交於原點，而且交角是$\frac{1}{2}\theta$的直線的反射對稱組合而成。

【例 5】 放大（或縮小）k倍的變換式就是$w=kz$，$k>0$。

設Γ_1、Γ_1以原點爲圓心半徑分別是r_1、r_2的同心圓，則組合變換$\rho_{\Gamma_2}\cdot\rho_{\Gamma_1}$的坐標變換式可以計算如下。設$P'=\rho_{\Gamma_1}(P)$，$P''=\rho_{\Gamma_2}(P')$，$P$、$P'$、$P''$的坐標分別是$z$、$u$、$w$，則有

$$z\bar{u}=r_1^2 \quad \bar{u}w=r_2^2$$

由此即得$w=\dfrac{r_2^2}{r_1^2}z=k\cdot z$，$k=(\dfrac{r_2}{r_1})^2>0$，所以放大（或縮小）變換乃是兩個上述同心圓的反映的組合。

【例 6】 $w=\dfrac{1}{z}$是對於實數軸的反射對稱和對於單位圓的反映的組合。

引理 3：任何一個線性分式變換 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq 0$，都可以由上述幾種簡單的變換適當組合而得。

【證明】

(i) 若 $c=0$，則上述變換其實就是一個線性整式：$w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$，它顯然就是放大，旋轉和平移的組合。

(ii) 設 $c\neq 0$，則 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 可以寫成

$$w=\frac{a}{c}+\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}}$$

由此易見，上述變換是可以分解成上述四種簡單的變換組合而成者。

(二)保圓、保角變換群(Möbius Group)：

經歷了上面這一大段討論，“變換”在幾何學的重要性業已彰然若熾，但是要眞正有系統地展現“變換”在幾何學中深遠的影響與廣濶的前景，却還有待變換群和不變量的基礎理論的建立。本節將以保圓保角變換群及其某些子群爲例，先作簡明的初步介紹。

從純代數的結構來說，群是一種十分簡樸、基本的代數結構，它僅有一個可逆的可結合的運算，通常我們採用乘法符號表示一個群的運算。

群的定義：一個群就是一個具有乘法運算的集合 G，而且滿足下列運算律，即

(i) 結合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

(ii) 可逆性：存在一個唯一的單位元素 e；$e\cdot a=a\cdot e=a$，對於群中任給元素皆成立。而且對於任給元素 a，唯一存在它的逆元素 a^{-1}，$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$。

當某一個群 G 中的每一個元素 g 都是一個給定空間 X 上的變換，亦即 $g:X\to X$ 是 X 的一個一、一對應，而且群的乘法也就是變換的組合，亦即 $g_1\cdot g_2=g_1\circ g_2$。則稱 G 爲 X 上的一個變換群。

【例】

(1)恒等變換和某一定圓的反映，$\{1,\rho_\Gamma\}$，構成 π（或 S^2）上的一個變換群，它只含有兩個元素，它們之間的乘法是 $1\cdot 1=1$，$1\cdot\rho_\Gamma=\rho_\Gamma\cdot 1=\rho_\Gamma$，$\rho_\Gamma\cdot\rho_\Gamma=1$。

(2)歐氏平面的所有保長變換構成其上的一個變換群，其中包含有平移、旋轉、反射對稱以及它們的組合。

(3)球面的所有保長變換構成其上的一個變換群。

(4)非歐平面的所有保長變換構成其上的一個變換群。

(5)一條射影直線 ℓ^* 到自身的所有射影變換構成一個其上的變換群。

(6)$\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 上的所有線性分式變換構成一個其上的變換群，它和例 5 是密切相關的。

(7)$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有線性分式變換構成一個其上的變換群。〔注意，$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有共軛線性分式變換所成的集合並不構成一個變換群！因爲兩個共軛線性分式變換的組合乃是一個線性分式變換，它是上述集合之外的元素！〕

定理 1：所有圓的反映的有限組合集成 $\hat{\pi}$（或 S^2）上的一個變換群 G（通常稱之爲Mobius 群），它也就是保持其上任給四點列複坐標的交叉比的共軛類不變的所有變換所構成的變換群。再者，G 中所含的偶數組合構成一個其秩（index）是 2 的子群 G'。這也就是保持交叉比不變的變換所構成的變換群。

【證明】

因爲圓的反映的有限組合顯然具有可結合的組合乘法，而且由 $\rho_\Gamma\circ\rho_\Gamma$ 總是恒等變換 1 易見

$$\rho_{\Gamma_1}\circ\rho_{\Gamma_2}\circ\cdots\cdots\circ\rho_{\Gamma_\ell}$$

和 $$\rho_{\Gamma_\ell}\circ\rho_{\Gamma_{\ell-1}}\circ\cdots\cdots\circ\rho_{\Gamma_1}$$

恒爲互逆變換。所以上述變換的集合在組合乘法之下構成一個群。再者，由引理1、2得知，G中的元素可以分成偶數個組合和奇數個組合這樣兩類，前者保持交叉比不變，而後者則把交叉比變爲其複共軛。由此可見，交叉比的共軛類總是保持不變的，而且由偶數個反映組合而成者集成一個G中秩（index）爲2的子群。

最後，我們還要驗證$\hat{\pi}$（或S^2）上的任何一個保持交叉比不變的變換都能表成偶數個圓的反映的組合。設$\varphi：\hat{\pi}\to\hat{\pi}$是這樣一個變換，令$O$、$E$、$\infty$分別就是$\hat{\pi}$上複坐標爲0、1、$\infty$之點；$w_1$、$w_2$和$w_3$分別是$\varphi(\infty)$、$\varphi(0)$和$\varphi(E)$的複坐標；$z$和$w$分別是動點$P$和其像點$\varphi(P)$的複坐標，則由$\varphi$的交叉比不變性即有

$$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\cdot\frac{w-w_2}{w-w_1}=(w_1w_2\,;w_3w)$$
$$=(\infty,0\,;1,z)=z$$

解之即得φ的坐標變換式

$$w=\frac{aw_1z-w_2}{az-1}\ ,\ a=\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$$

它是一個線性分式。由引理3得知這種變換都可以由偶數個圓的反映適當地組合而成。

再者，設ψ是一個把交義比變換成其複共軛者，則$\psi=\varphi\cdot\rho_\Gamma$，就是一個保持交叉比不變者。由此可見，$\psi=\varphi\cdot\rho_\Gamma$是可以表成奇數個圓的反映的組合的。〔證畢〕

推論1：任何G中的元素的坐標變換式都是一個線性分式或共軛線性分式。反之，任何坐標變換式是線性分式或共軛線性分式的變換都是G中的元素。

推論2：G中的元素由它在相異三點的值和交叉比不變性或共軛性所唯一確定。再者，對於$\hat{\pi}$中任給的兩組三點列$\{P_1,P_2,P_3\}$和$\{Q_1,Q_2,Q_3\}$，恒存在唯一的一對G中的元素φ，ψ，$\varphi(P_i)=Q_i$而且保持交叉比不變；$\psi(P_i)=Q_i$而且將交叉比變換爲其複共軛。

【證明】

設P_i、Q_i的複坐標分別是z_i、w_i，$i=1,2$，則上述變換φ、ψ就是其坐標變換式是

$$(w_1w_2\,;w_3w)=(z_1z_2\,;z_3z)$$
或 $$(w_1w_2\,;w_3w)=(\bar{z}_1\bar{z}_2\,;\bar{z}_3\bar{z})$$

所確定者也。

【例1】 設g_1、g_2是G_0中的兩個任給元素，它們的坐標變換式分別可以用下述線性分式表達，即

$$w=\frac{a_1z+b_1}{a_1z+d_1}\ 和\ w=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

試求組合變換$g_1\cdot g_2$的坐標變換式。

【解】

令z爲動點P的複坐標，u是$g_2(P)$的複坐標，w是$g_1(g_2(P)=g_1\cdot g_2(P)$的複坐標，則有

$$u=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2},\quad w=\frac{a_1u+b_1}{c_1u+d_1}$$

將上述u的表式代入第二式，即得

$$w=\frac{a_1\cdot\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\cdot\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1}$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1b_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+b_1c_2)}$$

改用分離係數的觀點來看，則g_1，g_2和$g_1\cdot g_2$的坐標變換式的係數“矩陣”之間的關係是：

$$g_1\to\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},\ g_2\to\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

$$g_1\cdot g_2\to\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2, & a_1b_2+b_1d_2\\ c_1a_2+d_1c_2, & c_1b_2+d_1c_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

亦即$g_1\cdot g_2$相應的係數矩陣也就是g_1、g_2的係數矩陣按照矩陣乘法所得者！

〔注意：上述G_0中的元素和它的坐標變換式的係數矩陣之間的對應並非一對一，因爲

當線性分式上、下同乘以一個非零常數時，顯然還是同一個分式。由此可見 G_0 中的元素是和上述係數矩陣的“等價類”成一、一對應的，兩個矩陣等價的條件就是兩者僅僅相差一個非零倍。〕

總結上述討論，本段的結果可以列述如下:

(1)由偶數個反映的組合所構成的變換群 G_0 也就是 $\hat{\pi}$ 或 S^2 上保持交叉比不變的變換所組成的變換群。

(2)對於 $\hat{\pi}$ 或 S^2 中複坐標系，任給 G_0 中的一個元素的坐標變換式是一個線性分式函數。反之。任給一個線性分式函數都是 G_0 中的元素的坐標變換式。再者，令 $SL(2,C)$ 是由所有行列式爲1的2階複方陣所構成的乘法群，則上述對應是二對一的同態，亦即是商群 $SL(2,C)/\{\pm I\}$ 到 G_0 的同構映射。

(3)對應於兩組給定的三點組 $\{P_i(z_i)\}$ 和 $\{Q_i(w_i)\}$，$i=1,2,3$；存在一個唯一的 G_0 中的元素 $g: P(z)\to Q(w)$，它把 P_i 映像到 Q_i，它的坐標變換式就是

$$(w_1w_2;w_3w)=(z_1z_2;z_3z)$$

的解式。

(4)令 γ 是對於實數軸的反映，則有 $G=G_0\cup\gamma\cdot G_0$。再者，設 $g\in G_0$ 所對應的矩陣是 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，則 $\gamma g\gamma$ 所對應的矩陣是 $\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{b}\\ \bar{c} & \bar{d}\end{pmatrix}$。

(三)三個特出的子群

上述Möbius變換群含有很豐富的子群結構，本節只簡要地介紹其三個特出的子群。

(1)令 BE 是由所有過北極 N 點的平面所構成的平面叢（bundle of planes），它們和 S^2 所交截而得的圓構成一個圓叢 $\mathscr{E}$，亦即在極投影之下對應於直線的那些圓所構成者。由此可見，由對於圓叢 $\mathscr{E}$ 中的圓的反映所生成的子群，H_1，其實也就是由所有對於直線的反映所生成的變換群，它就是 π 上的保長變換群！通常叫作歐氏平面的自同構群。

(2)令 $\mathscr{B}S$ 是由所有過原點 O 的平面所構成的平面叢，它們和 S^2 所交截而得的圓也就是由 S^2 上的所有“大圓”所組成的圓叢，$\mathscr{S}$，對於 $\mathscr{S}$ 中的一個大圓的反映也就是單位圓對於一個平面的反射對稱，所以是球面 S^2 的保長自同構。由此可見，由對於圓叢 $\mathscr{S}$ 中的圓的反映所生成的子群，H_2，其實也就是球面幾何的自同構群。

(3)令 $\mathscr{B}\mathscr{N}$ 是由所有和 x、y 坐標面垂直的平面所構成的平面叢，亦即所有過 z 軸上的無窮遠點的平面所構成者。它們和 S^2 的交截而得的圓也就是由 S^2 上所有和 $\Gamma_0=S^2\cap\pi_{xy}$ 正交的圓所組成的圓叢，$\mathscr{N}$，令 H_3 是由圓叢 $\mathscr{N}$ 中的圓的反映所生成的子群。因爲對於任給這樣一個圓 Γ 的反映，ρ_Γ，$\Gamma\in\mathscr{N}$，Γ_0 的內部，Γ_0 的外部和 Γ_0 這三個子集都顯然是保持不變的。在下一章的討論中，我們將說明變換群 (H_3, S^2_-) 其實可以很自然地想成是非歐幾何的自同構群。

由此可見，從變換群的幾何觀點，歐氏、球面、非歐這三種幾何都可以想成是將圓與角的Möbius幾何，對於其特殊子群的特殊化，此事將在下一章再詳加剖析研討。

——本文作者任教於美國
加州大學柏克萊分校——