數 播 信 箱

〔小　　啓〕

本刊前期（第一卷第三期）於本欄中登載傅溥教授答覆蔡崇峰先生所詢「微分、積分二學語命名由來」一信中有些錯誤，經傅教授來函指正，特更正如下:

1. 文中所提偉烈・亞力 (Alexander Wylie)及傅蘭雅（John Fryer）二人俱係英人，而非美人。

2. 我國古代數學家對於求圓周率的方法，係為「窮盡」法，而非「無窮盡」法。

此係編輯部一時疏漏，尚祈讀者見諒。

編 輯 部

編輯先生:

前些日子，學校老師教到巴斯卡(Pascal)定理，使我聯想到初中時學到的巴斯卡三角形，發現假如要想得到多項式的高次方各項係數〔例如$(x+y)^{11}$的各項係數〕，是不是只有老老實實地畫到11次方？有沒有什麼公式可循？（當時尚未教到二項式定理）。

於是我便畫了一個巴斯卡三角形，開始由它去推敲公式：假如$(x+y)^n$的各項係數可由公式求出，則公式爲何？首先畫一個巴斯卡三角形:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 2\quad 1 \\
1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1 \\
1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1 \\
1\quad 9\quad 36\quad 84\quad 126\quad 126\quad 84\quad 36\quad 9\quad 1
\end{array}
$$

發現n爲偶數時作有心的對稱。例如: 14641

n爲奇數時作無心的對稱，例如: 1331

而且首項係數皆爲1（因爲有對稱關係所以只討論前半部）；而第二項係數也都恰等於n。

於是便開始尋求第三項係數的規律性。首先由n爲奇數看起（$n=3$前半部只有兩項，不予討論）：

發現$n=5$時，a_{53}〔註一〕$=10=2\times 5=2a_{52}$，$n=7$時，$a_{73}=3a_{72}$，$a_{93}=4a_{92}$，……………經過反復思考、試設公式，終於發現$n\times(n-1)/2$恰能滿足n爲奇數時的第三項係數，例如$n=3$則$a_{33}=3(3-1)/2=3$，$a_{53}=5(5-1)/2=10$，再以n爲偶數代看看，$a_{23}=2(2-1)/2=1$，$a_{83}=8(8-1)/2=28$ ………等也都適用此公式，所以第三項係數便定爲$n(n-1)/2$

接着便開始尋求第四項的規律性。首先看到$a_{74}=35=5\times 7=5a_{72}$，$a_{84}=7a_{82}$，再往下畫則$a_{10,4}=12a_{10,2}$ ………，但

〔註一〕以後第幾項皆以a_{nk}表示，k表示第k項。

a_{62}卻不能整除 a_{64}. a_{92}，也不能整除 a_{94}；一時進展受到了阻礙，後來繼續思考，先將 $a_{94}\times 2=128$ 仍不能被 a_{92}整除，再將 $a_{94}\times 3=252$，卻剛好爲a_{92}整除得商=28，猛然一發現$28=a_{83}$，因此想到若$n=9$，則$8=n-1$.

$$\therefore a_{94}=\frac{a_{83}\times a_{92}}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{(n-1)[(n-1)-1]}{2}\text{（註二）}\times n}{3}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}=\frac{n(n-1))n-2)}{3\times 2\times 1}=C_3^n$$

再回顧前面的 a_{n3} 公式也等於 C_2^n, a_{n2} 也等於 C_1^n，而$a_{n1}=1$卽是C_0^n，因此終於發現 $(x+y)^n$ 的各項係數由x的降冪排列是 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n\cdots\cdots C_n^n$。證到此，突然發覺這個公式很面熟，好像開學剛發新課本時曾大略翻了一下，似乎見過它，於是便把實驗本拿出來一看是「二項式定理」，但課本上是用別的方法證明該定理，且課本上認爲巴斯卡三角形是由此定理推演出來的。因此我便產生了一些疑問：

a. 是先有二項式定理還是先有巴斯卡三角形？

b. 假如先有巴斯卡三角形，那麼以上的證明是否可算做由巴斯卡三角形證出二項式定理的一種方法？假如先有二項式定理，那麼此定理是誰創的？他如何會想出此一定理？盼編輯先生能爲我解答。謝謝！

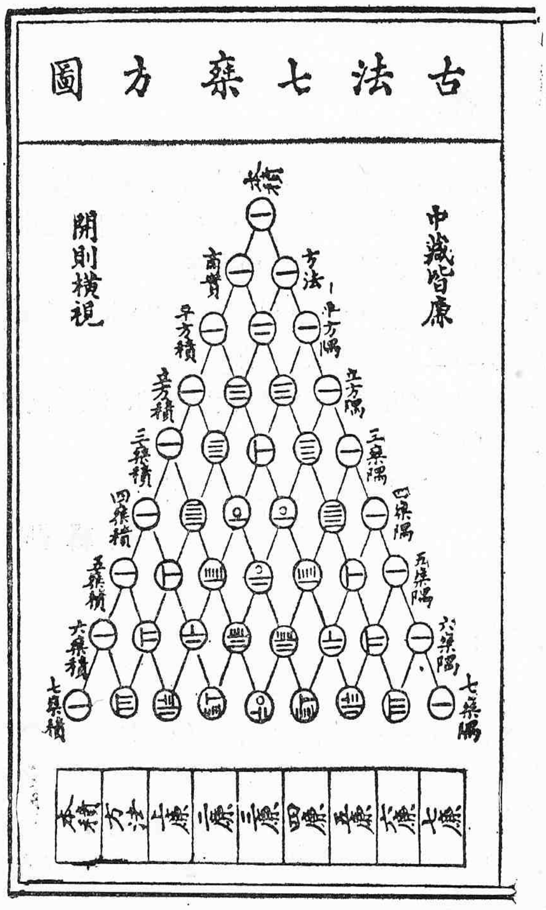
師大附中 346 班　蔡麟祥敬上

(65. 10. 25)

麟祥同學：

你來信所描述的思考過程，雖不是完整的二項式定理的證明，但你已做了很好的歸納工作，如果注意一下高一所學的數學歸納法，你該可以嚴密證完二項式定理的。至於你所提有關二項式定理與巴斯卡三角形何者先有的問題，觸及了中國古代數學黃金時期的一偉大成就，很有意思。

二項式定理比「巴斯卡三形」這名字要早出現約四百年左右，但實質的「巴斯卡三角形」却又比二項式定理早有。數學史（*Mathematical Thought From Ancient to Modern Times* by Morris Klein）記載，二項式定理乃阿拉伯人在十三世紀時所證，至於何人所創用，倒沒提。實質的所謂「巴斯卡三角形」，早在公1303元年，元朝時朱世傑所着的「四元玉鑑」中，列有一「古法七乘方圖」（見附圖），一般數學家所稱的「中國三角形」卽是。更早在宋朝，公元 1261 年時，楊輝所著「詳解九章算法」中，附有一篇談「釋鎖學習」，其中也有一圖解說此三角形。楊輝說明此三角形乃公元1100年左右，賈憲所著的「立成釋鎖」及大約同時代的劉汝諧所着的「如結釋鎖」（註：上兩書已失傳）所發明。因此實質上的巴斯卡三角形比二項式定理要早有，且爲中國人所發明，經印度，傳入阿拉伯，再傳入歐洲的。因是巴斯卡（公元1623-1662）在公元1654年時，將此三角形的功用極致化，利用它永求二項式展開式的係數，故名之。這種命名法，在數學史中，倒不見怪，很多數學新觀念的命名常冠以有效使用它的數學家名，而不冠以發明者之名。



林福來　代覆

（林福來先生係師大數學系所客座副教授）

〔註二〕若$n=9$，則 a_{83} 由前面得出的第三項係數公式求得等於 $\frac{n-1)[(n-1)-1]}{2}$

編輯先生:

這是六十三年度日間部大專院校一個考題，題目:

$$a_0=2\,,\ a_1=3\,,\ a_2=\frac{a_0+a_2}{2}\,,\cdots,\ a_n=\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$$

$$b_0=2\,,\ b_1=3\,,\ b_2=\frac{2b_0+b_1}{2}\,,\cdots,\ b_n=\frac{2b_{n-2}+b_{n-1}}{2}$$

求 a_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$

從高一下時，學生作此類題目，曾請教師長有無其他方法，並參閱「數學教室」，結果均使學生失望。有一天，在彰化某書店看到黃提源先生着作(機率入門)提到的數列 $(F(n))_{n=}^{\infty}$ 其一般解法:

「設 $a_1=a_2=1$, $F(n)=a_{n+2}$; 令 $a_{n+2}-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$. 而 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，得 $a_{n+2}-a_{n+}-a_n=0$. 比較兩式得 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$. 卽 $(\alpha,\beta=((1\pm\sqrt{5})/2,(1\mp\sqrt{5})/2)$. ……等」

其中 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ 這不就是二次方程式二根和與積嗎? 當我回到宿舍後，把剛剛在書店所讀的想一想，觸起我再去想那道考題。可是我想如此未必有用處，後來我又想很久，心裡有點疑問: 是否 a_0, a_1 須加以改造？無意中畫出

$$\begin{cases} a_0=\bigcirc+\bigcirc=2 \\ a_1=\bigcirc+\bigcirc=3 \end{cases}$$

其中某兩變數是否又與 α, β 有關。數日後，在從家鄉返校途中，又想此事。想到陳老師萬才先生，他常說作題目的方法有時候必須自己研究解決，所以又觸擊我再度動手去作，我把它設成

$$\begin{cases} a_0=A\alpha+B\beta=2 \\ a_1=A\alpha+B\beta=3 \end{cases}$$

再經過多次試驗得到的結果是:

若 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$，便有 $a_0=A+B=2$, $a_1=A\alpha+B.=3$. 把 $\alpha=-1/2$, $\beta=1$ 代入，得到 $A=-2/3$, $B=8/3\beta$ 當我看到 $B=8/3$ 時非常高興，抱着有希望的心情去作並且完成它各種類似題的試驗，很快得正確結果:

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{3}(1)^n$$

$$=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{3}$$

$$\therefore\qquad \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{8}{3}$$

這便是我的思想過程及思考結果，另有其他未能獲解的問題如下:

(i) 這題中 $\alpha\neq\beta$. 若 $\alpha=\beta$ 時，該怎麼辦? 曾問共研究的畢業生說: 會不會 $a_n=(A+n\beta)\alpha^n$ 呢?

(ii) 若 $a_n+pa_{n+1}+qa_{n+2}=r$ 而 $r\neq 0$ 時又將如何處理?

躬請先生替劣生證明，並加指正全程中想法。

彰中高三八班學生

洪坤糧　敬上

(65.11.20)

坤糧同學:

你的來信，早在十多天前收到，只是近時健康欠佳，不便卽時回信，請原諒。

今晚將你的信細讀，很高興你的努力，你的嘗試過程是正確的，是很多數學發現的正常路徑，今將你的結果說清楚一些:

「設有一遞廻數列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$$

其中

$$a_{n+2}+pa_{n+}qa_n=0$$

想求一般項 a_n.

可先解 (i) $x^2=px+q+0$

得其兩根 α,β (當然便滿足 $\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$)

然後自

$$\begin{cases} A\alpha+B\beta=a_1 \\ A+B=a_0 \end{cases} \qquad (1)$$

中解得 A, B 可證明

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n \qquad (2)」$$

【證明】

用歸納法可矣: 因 (當 $n=0, 1$, 已知(2)式成立)

$$a_n+pa_{n-2}=0$$

可化成

$$(a_n-\alpha a_{n-1})=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2}) \qquad (3)$$

假定已有

$$\begin{cases} A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}=a_{n-1} \\ A\alpha^{n-2}+B\beta^{n-2}=a_{n-2} \end{cases} \qquad (4)$$

則將(4)代入(3)式，立可加整理得

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n \qquad [證畢]$$

所以你的結果是正確的，但當 $\alpha=\beta$ 時，因這時(1)式無解，此法無效，除非 a_1 正巧是 a_0 的 α 倍。這種特形與你的另一個問題

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=r\,, \qquad r\neq 0$$

我一併在下邊說明。

(一)你所考慮的

$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=r \qquad (5)$$

通常稱為差分方程的一種，（記得我在彰中週三晚間研討會曾提過，不知你去參加過沒？），當 $r=0$ 時稱為齊性，當 $r\neq 0$ 時，稱為非齊性。

(二)當 $r=0$ 時，通常我們的做法是：

先試驗　$a_n=\gamma^n$　$(\gamma\neq 0)$

設 γ^n 要滿足(5)，則 γ 必然是

$$x^2+px+q=0 \qquad (6)$$

的根。（此因 $\gamma^n+p\gamma^{n-1}+q\gamma^{n-2}=0$

$$\longrightarrow \gamma^{n-2}(\gamma^2+p\gamma+q)=0$$
$$\longrightarrow \gamma^2+p\gamma+q=0)$$

設(6)式有 γ_1 與 γ_2 兩個根，則對任何 A, B.

$$a_n=A\gamma_1{}^n+B\gamma_2{}^n \qquad (7)$$

都仍滿足(5)式（$\gamma_1{}^n$ 與 γ^n 都滿足(5)式，則其線性組合 $A\gamma_1{}^n+B\gamma_2{}^n$ 便滿足(5)式）然後，再來找 A 與 B：

由於 a_0 與 a_1 已經給定了，因此(7)式在 $n=0$ 及 $n=1$ 時變成

$$\begin{cases} a_0=A\gamma_1{}^0+B\gamma_2{}^0=A+B \\ a_1=A\gamma_1=B\gamma_1 \end{cases} \qquad (8)$$

由此乃解得 A, B. A 與 B 一經決定，仍根據(7)式，$a_n=A\gamma_1{}^n+B\gamma_2{}^n$ 就決定了。

這個做法與你的結果是一致的。

但是你的想法猜測的成分太大，以致進一步的狀況你就不知如何下手了。

(三)仍假設 $r=0$ 如果(6)式中解得的 $\gamma_1=\gamma_2$，則(8)式便解不到 A, B 這時我們便再模仿(二)中嘗試的辦法：

今知 $\gamma=\gamma_1=\gamma_2$，而

$$a_n=\gamma^n$$

是滿足(5)式，現在試驗

$$a_n=n\gamma^n$$

（這試驗是模仿微分方程解法而來）

得知

$$n\gamma^n+p(n-1)\gamma^{n-1}+q(n-2)\gamma^{n-2}$$
$$=n\gamma^n-2\gamma(n-1)\gamma^{n-1}+\gamma^2(n-2)\gamma^n \quad {}^2\begin{pmatrix}-2\gamma=p \\ \gamma^2=q\end{pmatrix}$$
$$=0$$

故考慮 γ^n 與 $n\gamma^n$ 的線性組合

$$A\gamma^n+Bn\gamma^n$$

仍應滿足(5)式，所剩便是回來決定 $A\,B$；

$$\begin{cases} a_0=A\gamma^0+B\cdot 0\cdot\gamma^0=A \\ a_1=A\gamma+B\gamma \end{cases}$$

可得 A 與 B，而得

$$a_n=A\gamma^n+Bn\gamma^n$$

換句話說

定理： 當(6)式中的解為重根 γ 時，解

$$\begin{cases} a_0=A \\ a_1=(A+B)\gamma \end{cases}$$

中的 A, B 則(5)式的

$$a_n=A\gamma^n+Bn\gamma^n$$

（這裏假定 $r=0$，(5)式中的 r，不是 γ）

(四)若(5)式中的 $r\neq 0$ 則須先隨便找一個滿足(5)式的特殊的 a_n，例：

例1.　$a_0=2$, $a_1=5$

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=-2 \qquad (9)$$

取這特殊的 $a_n=n$，而

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0 \qquad (10)$$

的根 $\gamma=1$ 與 3，故

$$A\cdot 1^n+B\cdot 3^n$$

為(10)式的解，但

$$A\cdot 1^n+B\cdot 3^n+n$$

仍為(9)式的解，再由 a_0 與 a_1 及

$$\begin{cases} a_0=A\cdot 1^0+B\cdot 3^0+0=A+B \\ a_1=A\cdot 1^1+B\cdot 3^1+1=A+3B+1 \end{cases}$$

所得 $A=1$, $B=1$，故

$a_n=1+3^n+n$ 滿足(9)及 $a_0=2, a_1=5$.

例2. $a_0=1$. $a_1=3$

$$a_{n+1}-4a_{n+1}+3a_n=n^2$$

提示： 試驗　特殊的　$a_n=c_1n+c_2n^2+c_3n^3$

可得　$a_n=-\dfrac{1}{3}n-\dfrac{1}{6}a^2$

再取

$$a_n=A\cdot 1^n+B\cdot 3^n-\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}n^2$$

決定 A, B.

如果你有深入的興趣，不妨找差分方程的簡易介紹書來看，中文有蔡聰明先生編的「普通數學教程」：向

「北市新生南路一段150巷4號
郵政劃撥104200余果和帳戶」可以買到。

（售價很貴，180元）

黃武雄
民65年12月10日