6. 小題大作——一個邏輯觀念

葉東進

本文作者現任教於私立曉明女中。文末所附爲審稿先生的按語。

一個學生（朋友的孩子）拿了底下這道題目問我：

由實數所成的集合 S 滿足下列二條件：

(i) $1\notin S,\ 2\in S$ (ii) 若 $a\in S$，則 $\dfrac{1}{1-a}\in S$

求 $S=?$

思索了一會，我回他說上列 (i),(ii) 條件不足以確定 S，換句話說，滿足條件 (i),(ii) 的 S 可能有很多，他半信半疑，還說他這個題目是從一本參考書上看來的，上面的答案是 $S=\{2,-1,1/2\}$，並且幾天前他班上的老師也曾在課堂上舉了這個例子，答案也說是 $S=\{2,-1,1/2\}$。這下子可頭大了，莫非是我自己也沒搞通吧?!於是我要他把那本參考書拿來看看。

第二天，他拿來了，書上的解法如下（照抄）：

$$\because\ 2\in S\quad \therefore\ \frac{1}{1-2}\in S\qquad 即\ -1\in S$$

$$-1\in S\quad \therefore\ \frac{1}{1-(-1)}\in S\qquad 即\ \frac{1}{2}\in S$$

$$\frac{1}{2}\in S\quad \therefore\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in S\qquad 即\ 2\in S$$

此後 S 中的元素 $-1,1/2,2$ 重復出現，

故 $$S=\left\{2,-1,\frac{1}{2}\right\}$$

讀者到此不妨暫停一下，不要繼續閱讀本文，先想想上述的解法有否問題?

依我的看法：$2\in S\Rightarrow -1\in S\Rightarrow \frac{1}{2}\in S\Rightarrow 2\in S\Rightarrow\cdots$,

$$\because 2\in S\quad \therefore 2,-1,\frac{1}{2}\in S.\quad \therefore\left\{2,-1,\frac{1}{2}\right\}\subset S$$

我看不出爲什麼一定要 $S=\left\{2,-1,1/2\right\}$，實際上，如果取

$$S=\left\{2,-1,\frac{1}{2},3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right\}$$

驗算看看，仍然是滿足條件 (i),(ii)，或者取

$$S=\left\{2,-1,\frac{1}{2},3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{3},-3\right\}$$

或

$$S=\left\{2,-1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{3},-3\right\}$$

都可以說是滿足(i),(ii).

你也許會說 $3\notin S,1/4\notin S$，問題就在這裏！**這也就是參考書解法錯誤的原因，它的錯誤是它排除了 $3\in S$, $1/4\in S$ 的可能性**，而實際上，從條件 (i) $1\notin S,\ 2\in S$ 中，我們看不出 $3\in S$ 爲什麼不能成立，它只說 $2\in S$，並沒有說 $3\notin S$，即是說 $3\in S$ 可能成立，但這樣說並不表示 $3\in S$ 一定成立；說的淸楚些，$3\in S$ 可能成立，也可能不成立，如果你取

$$S=\left\{2,\ -1,\ \frac{1}{2}\right\}$$

即表示 $3\notin S$ 成立，如果取

$$S=\left\{2,-1,\frac{1}{2},3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right\}$$

即表示 $3\in S$ 成立，但由於 $3\in S$ 成立與否我們不能由條件 (i),(ii) 中肯定，因此就無法肯定 S，所以我只能說 $\{2,-1,1/2\}\subset S$，而不敢說（也不能說）$S=\{2,-1,1/2\}$，只要你稍有邏輯觀念，當不難同意我的說法。

其實，我很懷疑這個題目的用意？對一個高一學生它究竟能測驗出什麼東西？提供出什麼觀念？可笑的是，在臺中的一個明星學校的期考試卷上竟然列有這個題目，而答案竟也是 $S=\{2,-1,1/2\}$

【審稿人按語】

事實上滿足 (i),(ii) 兩項條件的集合 S 有無窮多個。首先我們由 (i) 知道 $1\notin S$，其次從 (ii) 可導出

$0 \notin S$，因爲若 $0 \in S$，則 $\frac{1}{1-0}=1 \in S$，與 (i) 相矛盾，

現在令 $a \neq 0$，$a \neq 1$，則 $f(a)=\frac{1}{1-a}$ 定義了一個從 $R \setminus \{0,1\}$ 到 $R \setminus \{0,1\}$ 的函數，而且

$$f(a)=\frac{1}{1-a}$$

$$ff(a)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=\frac{a-1}{a}$$

$$fff(a)=\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=\frac{a}{a-a+1}=a.$$

於是滿足 (i), (ii) 的 S 完全由下列諸條件決定:

(1) $0 \notin S$，$1 \notin S$

(2) $\left\{2, -1, \frac{1}{2}\right\} \subset S$

(3) 若 $a \in S$，則 $\frac{1}{1-a} \in S$，$\frac{a-1}{a} \in S$.

例子:

$$S=\left\{2, -1, \frac{1}{2};\ 3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$$

$$S=\left\{2, -1, \frac{1}{2};\ 3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3};\ \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -3\right\}$$

$$S=\left\{2, -1, \frac{1}{2};\ \sqrt{2}, \frac{1}{1-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}};\ \pi, \frac{1}{1-\pi}, \frac{\pi-1}{\pi}\right\}$$