4. 法向量的應用

丁村成

本文作者以他身爲一位高中學生的親身體驗及觀察，點出一般同學在數學學習上易犯的錯誤態度，貼切而中肯；所給的例子亦處理得相當好，頗值一般同學借鏡。但是文中幾處求法向量的地方，若逕用「直積」方法，計算當較快。

我們歡迎這類的稿件。

——編輯部

一、前言

在某次數學考試過後，有一位同學拿着題目找我研討，他一直抱怨「空間中座標幾何部分，公式多而且很容易混亂」。以下所列就是他在考場內所使用的「絕招公式」之一部分。

1. 點 (x_0, y_0, z_0) 與直線

$$L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{u}$$

所決定的平面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

2. 二相交直線

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

與

$$\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$$

所決定的平面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

3. 所決定二平行直線

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

與

$$\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$$

所決定的平面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

4. 過 (x_0, y_0, z_0) 且平行兩歪斜線 L_1 與 L_2 之平面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

l_1, m_1, n_1，爲 L_1 之方向分量

l_2, m_2, n_2，爲 L_2 之方向分量

5. 於空間上一點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 對於平面 $ax+by+cz+d=0$ 之對稱點之 Q 坐標爲

$$\left(x_1-\frac{2a(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2},\ y_1-\frac{2b(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2},\ z_1-\frac{2c(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

抄寫到此，頭腦不太靈光的我，已經感覺到有點頭痛了，因這實在是一種額外且不必要的負擔。以上公式，誠然是有其依據的，但它以怪異而類似的形態（指前四者）出現則難免會使同學易發生混亂。更妙的是，以上所說的那位同學雖很「勇敢」的把全部公式記住，而平常不深思其意，以致題目稍一變化，臨場就無法發揮其絕招了，歷史上所謂的「勇而無謀」該是這位勇士最好的寫照吧！

二、本文

之後，我告訴「他此部分若不用公式解，而只要將課本內的一些觀念融會貫通；不但一樣可以輕易解決，而也不需要去負擔那些體積很大的公式了。」

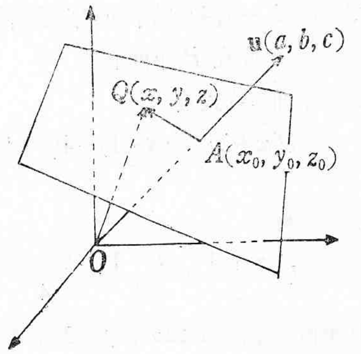
以下就是我告訴他以求法向量爲目標及如何充分利用所學簡單觀念來處理空間坐標幾何的一些例子。

處理之先，首先介紹一常見的定理：

〔定理〕過點 $A(x_0, y_0, z_0)$ 且其法向量（法線方向比）爲 a, b, c 之平面方程式爲

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

〔證明〕設 $Q(x, y, z)$ 爲平面上之任一點：因 $\overrightarrow{U}(a, b, c)$ 爲平面之法向量，



$\therefore$ $\overrightarrow{AQ}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ 垂直向量 $\overrightarrow{U}(a, b, c)$

故 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{U}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(a, b, c)=0$

得 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

即

> 欲求得一平面方程式，必須知道二條件
> 1. 平面之法向量（法線方向比）。
> 2. 平面上之任一點。

〔說例1〕：點 $A(2, 3, 1)$ 與直線 $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{3}$

所決定的平面方程式爲何？

〔解〕令直線上之一點 $(1, 2, 4)$ 爲 O

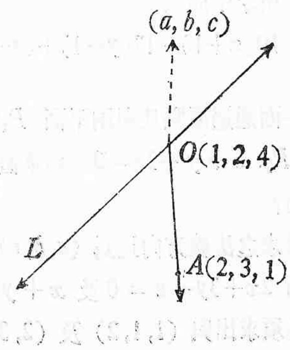
設平面之法線方向比爲 a, b, c，

則因 (a, b, c) 與 $(2, 3, 3)$ 及 $\overrightarrow{OA}$ 垂直

$\therefore$ $(a, b, c)\cdot(2, 3, 3)=0$　　(1)

$\overrightarrow{OA}(1, 1, -3)\cdot(a, b, c)=0$　　(2)

由(1), (2)得 $a:b:c=-12:9:-1$



此即平面之法線方向比。

故此平面方程爲

$$-12(x-x_0)+9(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$(x_0, y_0, z_0)=(2, 3, 1) \text{ 或 } (1, 2, 4)$$

〔說例2〕：求二相交直線

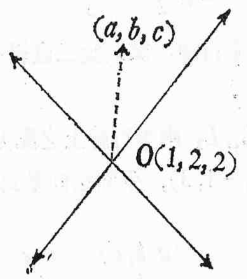
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{1}$$

與

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{4}$$

所決定之平面方程式爲何？

〔解〕已知的直線之法線分量爲 $(2, 3, 1)$ 及 $(3, 2, 4)$ 設與兩相交直線垂直的法線方向比爲 a, b, c，交點爲 $O(1, 2, 2)$，



則 $\begin{cases}(a, b, c)\cdot(2, 3, 1)=0\\(a, b, c)\cdot(3, 2, 4)=0\end{cases}$

得 $a:b:c=\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}$

$=10:-5:-5=2:-1:-1$

即此平面法線方向比爲 $(2, -1, -1)$.

$\therefore$ 所求平面方程爲

$$2(x-1)-(y-2)-(z-2)=0$$

化簡得 $2x-y-z+2=0$

〔說例3〕：過點 $A(3, 2, 1)$ 且平行兩歪斜線

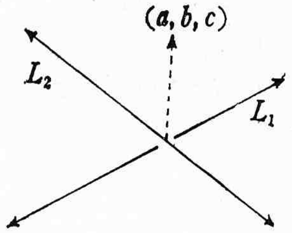
$L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$

與

$L_2: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{2}$

之平面方程式爲何？

〔解〕設與兩歪斜線垂直的法向量爲 a, b, c



則
$$\begin{cases} 2a+3b+4c=0 \\ 3a+2b+3c=0 \end{cases}$$

得 $a:b:c=-1:6:-5$

故所求平面方程式爲

$$(x-3)+6(y-2)-5(z-1)=0$$

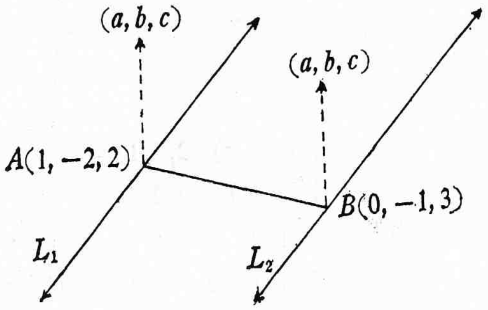
即 $2x-8y+5z+5=0$

〔說例4〕: 設 $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{4}$,

$$L_2: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

爲二平行線，試求此二直線所決定之平面方程式爲何?

〔解〕令 L_1, L_2 兩平行線上之點分別爲 $A(1,-2,2)$, $B(0,-1,3)$, 平面法向量爲 (a,b,c),



則 (a,b,c) 分別與 $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$ 及直線分向量 $(2,3,4)$ 垂直。

$\therefore$
$$\begin{cases} -a+b+c=0 \\ 2a+3b+4c=0 \end{cases}$$

得 $a:b:c=1:6:-5$

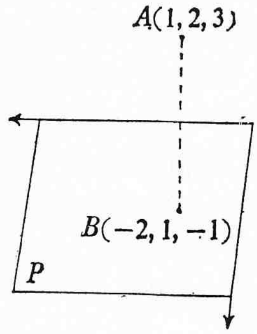
故平面方程式爲

$$(x-x_0)+6(y-y_0)-5(z-z_0)=0$$

$$(x_0,y_0,z_0)=(1,-2,2) \text{ 或 } (0,-1,3)$$

〔說例5〕: 設點 $A(1,2,3)$ 在平面 P 上之投影爲 $B(-2,1,-1)$, 則平面 P 之方程式爲何?

〔解〕因 B 點爲 A 點之投影，$\overrightarrow{AB}(-3,-1,4)$ 必與平面 P 垂直。



$\because$ $(-3,-1,4)$ 爲平面 P 之法向量，又 B 點在 P 平面上。

$\therefore$ 平面方程式爲

$$-3(x+2)-1(y-1)-4(z+1)=0,$$

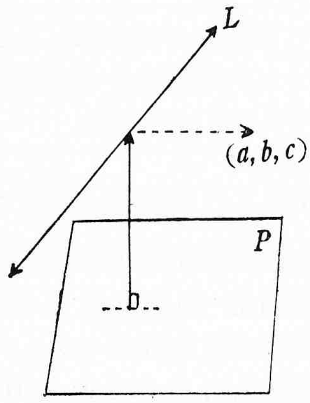
說例6: 求過直線

$$L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$$

且垂直於平面 $P: 2x+y-3z+4=0$ 之平面方程式爲何?

〔解〕設所求平面之法線方向比爲 a,b,c.

又當兩平面垂直時二平面之法向量亦必互相垂直。



$\therefore$
$$\begin{cases} 3a+2b+4c=0 \\ 2a+b-3c=0 \end{cases}$$

得 $a:b:c=-10:17:-1$

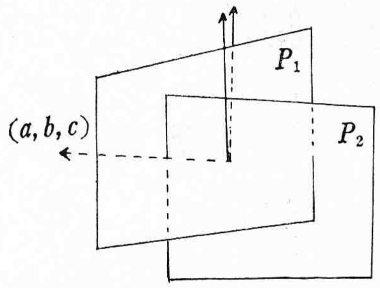
$\therefore$ 所求平面爲

$$10(x+1)-17(y-1)+(z-2)=0$$

「說例7:」一平面通過原點且與兩平面 $P_1: 2x+3y-z=0$ 及 $P_2: x+y+2z=3$ 均垂直，則此平面方程式爲何?

〔解〕設欲求之法線方向比爲 (a,b,c), 又此平面因與二平面 $2x+3y-z=0$ 及 $x+y+2z=3$ 均垂直，故必須求出與 $(1,1,2)$ 及 $(2,3,-1)$ 互相垂直之

向量 (a, b, c)



$$\therefore \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+3b-c=0 \end{cases}$$

得　　　　$a:b:c=-4:3:1$

所以方程式為　$-4x+3y+z=0$

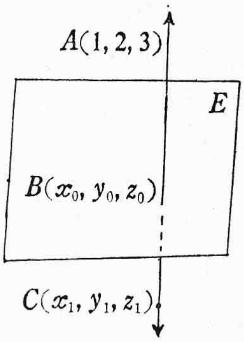
〔說例8〕: 點 $A(1,2,3)$ 在平面 E: $x-2y-2z-9=0$ 上之投影坐標為何? 又 A 點關於 E 之對稱坐標為何?

〔解〕設過 A 點且垂直於平面 E 之直線 L 為

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-2}=t$$

投影坐標為　　$B(x_0, y_0, z_0)$

對稱坐標為　　$C(x_1, y_1, z_1)$



則直線之參數式 $x=t+1$, $y=-2t+2$, $z=-2t+3$, 代入平面 E, 得 $t=2$. $\therefore$ 直線 L 與平面 E 交交點為 $(3,-2,-1)$, 此即 A 在 E 之投影坐標, 故 $(x_0, y_0, z_0)=(3,-2,-1)$.

又因 (x_1, y_1, z_1) 為平面 E 之對稱點,

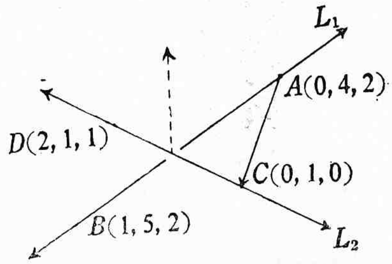
$\therefore$ A 點與 C 點之中點卽 B 點。

故 $\dfrac{x_1+1}{2}=3$, $\dfrac{y_1+2}{2}=-2$, $\dfrac{z_1+3}{2}=-1$,

得　　$x_1=5$, $y_1=-6$, $z_1=-5$.

〔說例9〕: 設直線 L_1 經過 $A(0,4,2)$, $B(1,5,2)$, 直線 L_2 經過 $C(0,1,0)$, $D(2,1,1)$. 試求 L_1 與 L_2 之距離?

〔解〕由題意知 $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$, $\overrightarrow{CD}(2,0,1)$. 設 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 二向量之法向量 $\overrightarrow{N}(a,b,c)$.



$$\therefore \quad \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=0 \end{cases}$$

故　　　$a:b:c=1:-1:-2$

又 $\overrightarrow{AC}(0,-3,-2)$, 則 $\overrightarrow{AC}$ 在法向量 $\overrightarrow{N}(1,-1,-2)$ 上之投影量為

$$|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$$

以上諸例，都以法向量為着眼，其解法雖不一定是最簡單的，但吾人介紹本文之主要目的並不在此，而是在於要的同學了解，數學是一門連貫，活用的學科。幾種不同類型使題目，往往不需悖於公式解或所謂的正解，而要先將教科書中的內容了解後，以自己的觀念去解決，數學才會日益進步 。

三、寫後有感

但據我所知，現在仍有大部分的中學生都將其學校所使用的教科書束之高閣不屑一觀，而偏好一些補習班及參考書中的「速成公式」、「考前猜題」、「速解絕招」之類的玩意。這實在是一種學好數學的障礙。因為依吾人之經驗，一個高中的學生，只有在自身已有很好的數學基礎並充分了解教科書的內容之後，再接受一些課外的資料才是有幫助的。否則僅僅接受一些片斷的公式，不但徒增頭腦記憶的負擔，甚至在處理資料或解題之時都會擾亂原有清晰的思維。所以希望有此情形的同學，若希望學好數學，就必須平常在課堂上好好聽講，且要將教科書內容切實領悟，並要將習題親自演練。因為惟有老師與教科書才能有系統的引導同學作思考的訓練。如此下去，逐漸的，你就能以自己的思路去處理問題，那才是學習數學進入正軌的開始。 否則等到三年高中畢業後，不但無法回想高中數學，更勿庸論要學好數學了。

(65年10月16日於臺西)